

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$\lim_{h\rightarrow 0}\frac{f(e^x\cdot e^h)-f(e^x)}{h}=2(e^{2x}-1) \text{ και } f(1)=1.$$

i) Να δείξετε ότι $f(x)=x^2-2\ln x, x>0$.

ii) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, τα κοίλα και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

iii) Να αποδείξετε ότι η ανίσωση $f(x^3+2x+3)\leq 1$ έχει ακριβώς μία λύση, έστω ρ , που ανήκει στο $(-1,0)$.

iv) Να αποδείξετε ότι $\int_{\rho}^0 (3x^2+2)f'(x^3+2x+3)f'(f(x^3+2x+3))dx>0$.