

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο για την οποία ισχύει

$$f(3) = f(2) + 5, \quad f(1) = 1 + f(0) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(2-x)}{x^2 - 3x + 2} = -4.$$

i) Να δείξετε ότι $f'(1) = 2$.

ii) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = 3x^2 - 14$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(2, 3)$.

iii) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = 3x^2 - 2$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 3)$.

iv) Να δείξετε ότι $\int_0^1 xf''(x) = 1$.