

Δίνεται συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x)e^{f(x)} = x$ για κάθε $x \geq 0$.

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί η f^{-1} .

Έστω $f^{-1}(x) = xe^x$, $x \in \mathbb{R}$.

ii) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 f^{-1}(x)dx$.

iii) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^e f(x)dx$.

iv) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\ln x}$.