

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 + \alpha x^2 + 4, x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι $f(x) \geq \alpha + 6$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

i. Να βρείτε το α .

Έστω $\alpha = -3$

ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

iii. α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $(\varepsilon): y = -\frac{3}{2}x + \frac{17}{4}$ είναι η εφαπτομένη της C_f με την μικρότερη κλίση, που διαπερνά τη γραφική παράσταση της f .

β) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{x - \eta\mu x}{\left(e^{\frac{x-1}{2}} - 1\right)(4f(x) + 6x - 17)}$.

iv. Να δείξετε ότι $e^{f(x)-4} \leq f(x) - 3 + \frac{1}{2}(f(x) - 4)^2$ για κάθε $x \in (-\infty, 1)$.

v. Να αποδείξετε ότι $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(\eta\mu x) dx < \frac{17\pi + 12}{8}$.