

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = (e^x - 1)^2 - x^2 + 2x$, $x \in \mathbb{R}$ και F μία αρχική της f με $F(0) = -\frac{3}{2}$.

i) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii) Να δείξετε ότι $2F(x) + 3 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επιπλέον δίνεται συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και κυρτή για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x^2) - 1}{x^2} = 1.$$

iii) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_g στο σημείο $M(0, g(0))$.

iv) Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{G(x) - G(0) - \frac{x^2}{2} - x}$, όπου G μία αρχική της g .

β) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{g(x^2) + \sin^2 x - 2}{x^2 - x} \cdot \ln x \right)$.

v) Να λυθεί η εξίσωση $f((e^x - 1)^2) - g'(x^2 - 2x) = f(x^2 - 2x) - g'((e^x - 1)^2)$, $x \in \mathbb{R}$.