Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=(2x-1)\ln x - x + 1$, $x>0$.

i) Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Επιπλέον δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\dfrac{xf'(x)\ln x + f(x)}{x}=\left(\dfrac{2x}{x^{f(x)}}-\dfrac{1}{x^{f(x)}}\right)e^{x^2-x}$, $x>1$ και $f(e)=e^2-e$.

ii) Να δείξετε ότι $f(x)=\dfrac{x^2-x}{\ln x}$, $x>1$.

Δίνεται η συνάρτηση $\Phi(x)=\begin{cases} f(x) & , x>1 \\ \alpha & , x=1 \end{cases}$, $\alpha\in\mathbb{R}$

iii) Να βρείτε την τιμή του $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε η Φ να είναι συνεχής.

Έστω $\alpha=1$

iv) Να δείξετε ότι η Φ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

v) Να μελετήσετε την Φ ως προς τη μονοτονία.

vi) Αν επιπλέον η συνάρτηση Φ είναι κυρτή στο $[1,+\infty)$, να λύσετε την εξίσωση $\Phi(x^2+1)-\Phi(x+1)=\Phi(x^2)-\Phi(x)$.