

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x^2 \ln x + x + 1, & x > 0 \\ \kappa & , x = 0 \\ e^x + \lambda & , x < 0 \end{cases}$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, όπου

$$\kappa = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t^2}{4} \eta\mu \frac{2}{t} - \frac{t-2}{2} \right).$$

- i. Να δείξετε ότι $\kappa = 1$ και $\lambda = 0$.
- ii. Να δείξετε ότι ορίζεται η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(0,1)$.
- iii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = \rho, \rho > 2$ είναι αδύνατη.
- iv. Να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα ακριβώς σημείο, με τετμημένη $x_0 \in (2,3)$.
- v. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(\alpha)}{x-1} - \frac{f(\beta)}{x-2} = 0$, $\alpha < x_0 < \beta$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(1,2)$, όπου x_0 η ρίζα της $f(x) = 0$.
- vi. Να λυθεί η εξίσωση $f(e^{x-1}) \cdot f\left(\eta\mu \frac{\pi x}{2}\right) = 4$ στο $(-\infty, 1]$.