Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(4^x-1)-\ln(2^x+1)$, $x>0$

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

ii) Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)$.

β) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\eta\mu^2(x-1)}{\ln x\cdot f(x)}$.

γ) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{f(x)}\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)$.

iii) Να αποδείξετε ότι $\int_1^2 \ln 2f(x)dx<2\ln\dfrac{2e}{3}$.

iv) Να δείξετε ότι:

α) $f(x)\geq\ln3\cdot(x-1)$ για κάθε $x\in[1,2]$.

β) $\dfrac{\ln3}{2}<E(\Omega)<\ln2$, όπου $E(\Omega)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=2$.

v) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in(1,2)$ ώστε $f(\xi)=\sqrt[3]{f\left(\dfrac{3}{2}\right)\cdot f\left(\dfrac{4}{3}\right)\cdot f\left(\dfrac{5}{4}\right)}$.

vi) Να δείξετε ότι $\left|f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\right|\geq\sqrt{f(\alpha)f(\beta)}$, όπου $\alpha,\beta\in(1,+\infty)$.