Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν

- $f(x)\cdot f'(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ για κάθε $x\neq 0$
- $f(0)=0$
- $f(\alpha)>0$, όπου $\alpha>0$, $f(\beta)>0$, όπου $\beta<0$.

i) Να δείξετε ότι $f(x)=\sqrt{\ln(x^2+1)}$, $x\in\mathbb{R}$.

ii) Να εξετάσετε αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle για την f στο $[-1,1]$.

iii) α) Να δείξετε ότι η f είναι άρτια.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

iv) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $\int_1^2 f(x)e^{x^2+x}(2x+1)dx=(e^6-e^2)f(\xi)$.

v) Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{f(x)}\cdot\text{ημ}x\right)$.

β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{f^2(x)+1}+5-f(x)}{f(x)+\sqrt{4+3f^2(x)}}$.

γ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{|f^2(x)-5f(x)|+f(x)}{f^2(x)-3f(x)+2}-f(x)\text{ημ}\dfrac{1}{f(x)}\right)$.