

Δίνεται $f(x) = 2e^{x^3} + x^3 + x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

i) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f^{-1} .

ii) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} έχουν μοναδικό σημείο τομής με τετμημένη $x_0 \in (-1, 0)$.

iii) Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $[0, +\infty)$.

iv) Έστω F αρχική της f στο $[0, +\infty)$ με $F(0) = -1$.

α) Να δείξετε ότι F κυρτή στο $[0, +\infty)$.

β) Να δείξετε ότι $F(\xi) = 0$ για $\xi \in (0, +\infty)$.

v) Να υπολογίσετε τα όρια

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x \ln x}{F(x)} \cdot \eta\mu x \right)$.

β) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^{-1}(x)}{\eta\mu(x-1)}$.

vi) Να λυθεί η εξίσωση $F(|x|+1) + F(3|x|+1) = 2F(2|x|+1)$.