

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + \beta x + 1, & x \leq 0 \\ \ln(x+1) + \alpha, & x > 0 \end{cases}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ και } g(x) = 2x - \frac{1}{x}, x \neq 0.$$

- i) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της g .
- ii) Να βρείτε τις τιμές των α, β ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και στη συνέχεια να βρεθεί η εφαπτομένη στο $(0, f(0))$.
- iii) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη.
- iv) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = 2x$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο ακριβώς σημεία με τετμημένες $x_1 \in (-2, -1)$ και $x_2 \in (0, 1)$.
- v) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\rho \in (-2, 1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\rho) = 2$.
- vi) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (-2, 1)$ τέτοια, ώστε $\frac{1}{f''(\xi_1)} + \frac{1}{2f''(\xi_2)} = -1$.