

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$. Η C_f έχει σημείο καμπής στο σημείο με τετμημένη 1 και ισχύει $\int_0^2 f(x) dx = 4$.

- i. Να δείξετε ότι $\alpha = -1$, $\beta = 3$.
- ii. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, τα κοίλα και τα σημεία καμπής.
- iii. Να δείξετε ότι $\int_{x_1}^{x_3} f(x) dx - \int_{x_2}^{x_3} f(x) dx = 4$, όπου x_1 και x_2 οι θέσεις του τοπικού ελαχίστου και του τοπικού μεγίστου, αντίστοιχα, της f και x_3 η θέση του σημείου καμπής.
- iv. Να αποδείξετε ότι $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\varepsilon \varphi^2 x + 1) dx < \frac{12 - \pi}{4}$.
- v. Επιπλέον, δίνεται η συνάρτηση

$$\Phi(x) = \left(\int_0^2 f(x) dx \right) \eta \mu x - \left(\int_0^2 (3x - 1) dx \right) \sigma \nu x, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right].$$

Να αποδείξετε ότι $\eta \mu \xi + \sigma \nu \xi = \frac{4}{\pi}$, όπου $\xi \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$.