

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = (x^2 + \alpha x)e^{\beta x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\beta \neq 0$ .

i) Να δείξετε ότι η  $f$  έχει δύο κρίσιμα σημεία  $x_1, x_2$ .

ii) Αν ισχύει  $x_1 x_2 = -2$  και  $x_1 + x_2 = 0$  να βρεθούν τα  $\alpha, \beta$ .

Έστω  $\alpha = 2, \beta = -1$

iii) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

iv) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την κυρτότητα, τις θέσεις των σημείων καμπής και να δείξετε ότι είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία  $x = 1$ .

v) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την  $C_f$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες  $x = 0, x = 1$ .

vi) Να αποδείξετε ότι  $\int_0^1 \frac{1}{(x+2)^2} F(x) dx = -\frac{1}{3}F(1) + \frac{e-2}{e}$ , όπου  $F$  μία αρχική της  $f$  με  $F(0) = 0$ .