

Έστω συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(e^x - 1)f(x) - x = \eta\mu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i) Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f .

$$\text{Έστω } f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x + x}{e^x - 1}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}.$$

ii) Να αποδείξετε ότι ορίζεται η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0, 2)$ και να βρεθεί η εξίσωσή της.

iii) Να δείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iv) Να δείξετε ότι $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$.

v) α) Να αποδείξετε ότι $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{f(-\sigma\upsilon\nu x)}{f(\sigma\upsilon\nu x)} dx > \frac{\pi + 3}{6}$.

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^1 \frac{x + \eta\mu x}{f(x) + f(-x)} dx$.

vi) Να αποδείξετε ότι $F(x) + F(-x) \leq 2F(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου F αρχική της f .