

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x + x - 1$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \eta\mu x$, $x \in [0, 2\pi]$.

i) Να ορίσετε τη συνάρτηση $\varphi = f \circ g$.

ii) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της φ .

iii) Να λυθεί η εξίσωση $e^{\eta\mu x} = 1 - \eta\mu x$ στο $[0, 2\pi]$.

Έστω Φ αρχική της φ

iv) Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της Φ και να δείξετε ότι $\Phi(x) \leq \Phi(\pi)$.

v) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (\pi, 2\pi)$ ώστε $\int_{\pi}^{2\pi} \Phi(x) dx = \pi \cdot \Phi(\xi)$.

vi) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\ln\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\Phi(x) - \Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) - e\left(x - \frac{\pi}{2}\right)} + \eta\mu \frac{2026}{x - \frac{\pi}{2}} \right)$.