

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\begin{cases} x \ln x^3 + 1, & x > 0 \\ \alpha & , x = 0 \end{cases}$,
 $\alpha \in \mathbb{R}$.

- i. Να δείξετε ότι $\alpha = 1$.
- ii. Να δείξετε ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο $[0,1]$ και στη συνέχεια να βρείτε τα $\xi \in (0,1)$ ώστε $f'(\xi) = 0$.
- iii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, τα κοίλα και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

Έστω $A(0, f(0))$ και $B(e, f(e))$

- iv. α) Να δείξετε ότι η AB έχει εξίσωση $y = 3x + 1$.
β) Να αποδείξετε ότι $f(x) \leq 3x + 1$ για κάθε $x \in [0, e]$.
- v. α) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου $E(\lambda)$ που περικλείεται από την C_f , τη ευθεία AB και τις ευθείες $x = \lambda$ και $x = e$, όπου $\lambda \in (0, e)$.
β) Να βρεθεί το $\lim_{\lambda \rightarrow 0} E(\lambda)$.