Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\begin{cases} e^{-x}-x(\ln x-1) &, x>0 \\ \kappa+\lambda &, x=0 \end{cases}$,

$\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$, όπου $\kappa=\int_{-e}^{-1}\ln(-x)dx$.

i) Να δείξετε ότι $\kappa=1$, $\lambda=0$.

ii) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και να δείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,x_0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[x_0,+\infty)$, όπου $x_0\in(0,1)$.

Έστω F αρχική της f στο $[0,+\infty)$

iii) Να αποδείξετε ότι $F(x)\le F(\rho)$, όπου ρ η ρίζα της εξίσωσης $\ln x-1=\dfrac{1}{xe^x}$, $x>0$.

iv) Να αποδείξετε ότι $\int_{x_0}^{\rho}F''(x)dx<x_0^2-x_0-1$.

v) Να δείξετε ότι $\int_{1}^{2}F(x)dx<f(x_0)\dfrac{3-2x_0}{2}+F(x_0)$.