

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο. Ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(f' \left(\frac{1}{x} \right) - x^2 \eta \mu \frac{1}{x} + x - \frac{1}{6x} \right) = 0.$$

i) Να αποδείξετε ότι το $x_0 = 0$ είναι πιθανή θέση σημείου καμπής.

Επιπλέον, δίνεται $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, $f'(\alpha)f'(\beta) < 0$, όπου $\alpha < 0 < \beta$ και $f'(\alpha) < f'(\beta)$.

ii) Να δείξετε ότι $f(x) \geq f(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iii) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε
$$\int_0^1 2(F(1) - F(x)) dx = f(\xi),$$
 όπου F αρχική της f .