Δίνεται συνάρτηση $f:\left(\frac{1}{e},+\infty\right)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $x^{f(x)}=e^{x-f(x)}$ για κάθε $x>\frac{1}{e}$.

i) Να δείξετε ότι $f(x)=\frac{x}{\ln x+1}$, $x>\frac{1}{e}$.

ii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

iii) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

iv) Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to e^+}\left(e^{\frac{1}{f(x)-\frac{x+e}{4}}}\cdot \text{ημ}\frac{1}{x-e}\right)$.

Έστω F μία αρχική της f με $F(e)=e$.

v) Να δείξετε ότι η F είναι γνησίως αύξουσα και να την μελετήσετε ως προς την κυρτότητα.

vi) Να δείξετε ότι $\int_1^e F(x)dx>\frac{-e^3+6e^2-5e}{4}$.

vii) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{\int_1^e (xf(x)+F(x))dx-e^2}{x-1}+\frac{f(e^\alpha-\alpha)-1}{e-x}=0$, $\alpha\neq 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(1,e)$.