

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει $xf'(x) = (x+1)f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(1) = e$, $f(-1) = -\frac{1}{e}$.

i) Να δείξετε ότι $f(x) = xe^x$, $x \in \mathbb{R}$.

ii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, τα κοίλα και τα σημεία καμπής και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

iii) Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu x + x}{f(x)}$.

iv) Να αποδείξετε ότι $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\eta\mu x)}{f(-\eta\mu x)} dx < -\frac{\pi}{6} - 1$.

v) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\left(2 \int_0^1 f(t) dt\right) \cdot x^3 - 2 = \left(\int_1^0 tf(t) dt\right) \cdot x$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0,1)$.