

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \ln(e^x + \alpha e^{-x})$ , όπου  $\alpha \in (0, +\infty)$ .

i) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Αν  $x_0$  η θέση τοπικού ακροτάτου της  $f$ , να δείξετε ότι το σημείο  $M(x_0, f(x_0))$  για τις διάφορες τιμές του  $\alpha \in (0, +\infty)$  ανήκει σε ευθεία, της οποίας να βρεθεί η εξίσωση.

Έστω  $\alpha = 1$

iii) Να αποδείξετε ότι  $2f(0) < f(1) + f(-1)$ .

iv) Σημείο  $N(x, y)$  κινείται κατά μήκος της καμπύλης  $y = f(x)$ ,  $x < 0$  και ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του είναι  $2 \text{ cm/sec}$ . Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου  $OKN$ , όπου  $K$  η προβολή του  $N$  στον άξονα  $x'x$  και  $O$  η αρχή των αξόνων, τη χρονική στιγμή  $t_0$  που η τεταγμένη του σημείου  $N$  είναι  $\ln(e^2 + 1) - 1$ .

v) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα  $\int_0^1 2e^{2x} f(x) dx$ .