

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $e^{f(x)-x} = f^2(x) + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i) Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί η f^{-1} .

Έστω $\varphi(x) = x - \ln(x^2 + 1)$, $x \in \mathbb{R}$

ii) Να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς τη μονοτονία, τα κοίλα, τα σημεία καμπής και να δείξετε ότι τα σημεία καμπής είναι συμμετρικά ως προς το σημείο $\Gamma(0, -\ln 2)$.

iii) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^1 x\varphi(x)dx$.

iv) Να αποδείξετε ότι $\int_{-\alpha}^{\alpha} \varphi(\varphi(x))dx < 0$, όπου $\alpha > 0$.

v) Να αποδείξετε ότι $\left| \int_{-1}^2 \varphi(x)dx \right| < \frac{3}{2}$.