Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f'(x) = -\dfrac{x\cdot f(x)}{x^2+1}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $f(0)=1$

i) Να βρείτε τη συνάρτηση f.

Έστω $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$ και $g(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$, $x\in\mathbb{R}$.

ii) Να δείξετε ότι η g είναι αρχική της f .

iii) Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία, τα κοίλα, τα σημεία καμπής και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

iv) Να βρεθεί το $\lim\limits_{v\to+\infty} \mathrm{I}(v)$, όπου $\mathrm{I}(v)=\displaystyle\int_{\frac{1}{v}}^{\frac{2}{v}} f(x)dx$, $v\in\mathbb{N}^*$.

Επιπλέον, δίνεται η συνάρτηση $\Phi(x)=\displaystyle\int_0^1 \left(3x^2t^2-2xt\cdot f(t)+f(t)\right)dt$, $x\in\mathbb{R}$

v) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση Φ παρουσιάζει ελάχιστο, έστω στο x_0, και ισχύει $\Phi(x_0)=\ln\dfrac{1+\sqrt{2}}{e^{3-2\sqrt{2}}}$.