

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $(x^2 + 1)f'(x) = (x + 1)^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(1) = \ln(2e)$

Επίσης, F αρχική τη f με $F(0) = 0$.

i) Να δείξετε ότι $f(x) = \ln(x^2 + 1) + x$, $x \in \mathbb{R}$.

ii) α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, την κυρτότητα, τα σημεία καμπής και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

β) Να δείξετε ότι $f(f(x)) \geq x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iii) Να δείξετε ότι $\left| \int_0^1 \left(f(x) - \frac{2}{3} \right) dx \right| < \frac{1}{6}$.

iv) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $3F(x) = x + \int_0^1 f(t) dt$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

v) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{2 \int_0^1 f(t) dt - 1}{x-1} + \frac{\int_0^1 F''(x) dx}{x} = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0,1)$.