

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\ln(x+1)+1 \leq f(x) \leq e^x$ για κάθε $x \geq 0$. Επιπλέον δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \alpha f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

- i. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο της $M(0, f(0))$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = \frac{\pi}{4}$.
- ii. Να βρείτε το α ώστε η εφαπτομένη της C_g στο σημείο $N(0, g(0))$ να είναι παράλληλη στην (ε).

Έστω $\alpha = 1$.

- iii. Αν $E(\Omega)$ το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις C_f, C_g και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$, να αποδείξετε ότι $\ln 4 - \frac{3}{4} \leq E(\Omega) \leq e - 2$.