Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύουν:

- $f(x)=x-e^{2x}-1+f'(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $f(x)=x+\frac{1}{4}f''(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

i) Να βρείτε τη συνάρτηση f.

Έστω $f(x)=e^{2x}+x$, $x\in\mathbb{R}$, $g(x)=x^3$, $x\in\mathbb{R}$ και $h=f\circ g$.

ii) Να δείξετε ότι $h(x)=e^{2x^3}+x^3$, $x\in\mathbb{R}$.

iii) Να δείξετε ότι η h είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί το πεδίο ορισμού της h^{-1}.

iv) α) Να βρείτε το σημείο τομής της $C_{h^{-1}}$ με τον άξονα $x'x$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $h\left(f(x)-1\right)+h^{-1}\left(x^3+x+1\right)\leq 1$.

iv) Σημείο $M(x,y)$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=H(x)$, όπου H αρχική της h και ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του είναι $2cm/\sec$. Έστω φ η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_H στο σημείο M με τον άξονα $x'x$. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας φ τη χρονική στιγμή που η τετμημένη του M είναι ίση με 1.

v) α) Αν $H(0)=0$, να αποδείξετε ότι $\int_0^1 xH(x)dx>\frac{1}{3}$.

β) Να αποδείξετε ότι $\frac{7}{4}<\int_0^1 h(x)dx<e^2+1$.