Δίνεται συνάρτηση $g:\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $g''(x)=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, $g(0)=2$ και η εφαπτομένη της C_g στο σημείο με τετμημένη $x_0=\frac{\pi}{4}$ είναι κάθετη στην ευθεία $3x+6y+1=0$.

i) Να δείξετε ότι $g(x)=-\ln(\sigma\upsilon\nu x)+x+2$, $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$.

ii) Να αποδείξετε ότι η g είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί το πεδίο ορισμού της g^{-1}.

Έστω G μία αρχική της g με $G(0)=0$

iii) α) Να αποδείξετε ότι $E(\Omega)>\frac{\pi-3}{6}$, όπου $E(\Omega)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_g, την $y=x+2$ και τις ευθείες $x=0, x=1$.

β) Να δείξετε ότι $2G(x)\geq x^2+4x$ για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$.

γ) Να δείξετε ότι $\int_0^1 xG'(x)dx<G(1)-\frac{7}{6}$.

iv) Να βρείτε το όριο $\lim_{x\to 0}\frac{g(\eta\mu x)-G(x^2+x)-2}{x}$.

v) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sigma\upsilon\nu x G''(x)dx$.

vi) α) Να μελετήσετε την G ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $G(x)=\frac{1}{2026^2\cdot x}$ έχει μοναδική ρίζα στο $\left(0,\frac{1}{2026}\right)$.