

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $2f'(x) + 3xf^2(x) = 0$ και $f(0) = 1$.

i) Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f .

ii) Αν $f(x) = \frac{4}{4+3x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε

α) το σύνολο τιμών της f .

β) το εμβαδόν E του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ σαν συνάρτηση του x , όπου $A(x, 0)$, $B(x, f(x))$, $\Gamma(-x, f(x))$ και $\Delta(-x, 0)$ με $x > 0$.

γ) το x ώστε το εμβαδόν E του ορθογωνίου να είναι μέγιστο.

iii) Σημείο $M(x, y)$, $x \geq 0$ κινείται πάνω στη C_f . Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού E του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$, τη χρονική στιγμή που αυτό γίνεται μέγιστο.

iv) Αν $x \geq 0$ να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί η f^{-1} .

Έστω F αρχική της f με $F(1) = 1$

v) Να βρεθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^1 F(x) dx$.

vi) Να αποδείξετε ότι $F(\eta\mu^2 x) + F(\ln(x^2 + 1)) - 2F(x^2) \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

vii) Να αποδείξετε ότι $\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(\eta\mu x) dx < \frac{3\pi}{14} + \frac{4}{7}$.

viii) Να αποδείξετε ότι $\ln F(x)^{F(x)} \geq (x-1)f(x)$ για κάθε $x \geq 1$.