

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x}{x}, & x \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi] \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\eta\mu x dx, & x = 0 \end{cases}$.

i) Να δείξετε ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο $[-\pi, \pi]$.

ii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

iii) α) Να λυθεί η εξίσωση $\pi\eta\mu x = 2x$ (1), $x \in [-\pi, \pi]$.

β) Να δείξετε ότι $\int_{-\pi}^{\rho_1} xf(x)dx = \int_{\pi}^{\rho_2} xf(x)dx$, όπου $\rho_1 < 0 < \rho_2$ οι ρίζες της εξίσωσης

(1).

Επιπλέον, δίνεται F αρχική της f με $F(0) = 0$

iv) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{F(x-\pi) - F\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{x} - \frac{F(e^{x-1} - x + \pi) - F\left(\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right)}{x-1} = 0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$.

v) Να αποδείξετε ότι $\int_0^{\rho_2} F(\eta\mu x)dx < 1$.