Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f'(x)=-(e^x+xe^x)f^2(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $f'(0)=-1$, $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i) Να βρείτε τη συνάρτηση f.

ii) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό $\kappa>0$ ώστε η εξίσωση $\dfrac{1}{xe^x+1}=\kappa(\ln\kappa-1)+\dfrac{2e-1}{e-1}$ να έχει λύση.

iii) Να αποδείξετε ότι $\int_0^{\kappa}F(x)dx<\frac{1}{2}+F(0)$, όπου F αρχική της f.

Έστω $\Phi(x)=\big(F(\eta\mu\alpha)-F(1)\big)x-\Big(F(e^{\beta}-\beta)-F(1)\Big)(x-1)$, $x\in[0,1]$, όπου $\alpha\in(0,1)$ και $\beta\neq 0$.

iv) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\Phi(x)=0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0,1)$.

v) Να αποδείξετε ότι $2\int_0^{\rho}\Phi(x)dx=\rho\cdot\Phi(0)$, όπου ρ η ρίζα της εξίσωσης $\Phi(x)=0$.