

Δίνεται η συνάρτηση  $g(x) = (x-1)\ln x$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .

i) Να αποδείξετε ότι  $g(x) + (x-1)^2 \geq 0$  για κάθε  $x \in (0, +\infty)$ .

ii) Να λύσετε την εξίσωση  $(\eta\mu x - 1)\ln(\eta\mu x) = -e^{2x-\pi} + 2e^{x-\frac{\pi}{2}} - 1$ ,  $x \in (0, \pi)$ .

iii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\xi \in (1, x)$  ώστε  $\ln \frac{\xi}{e} + 1 - \frac{1}{\xi} + x > 0$ .

iv) Να αποδείξετε ότι  $g'(x^4) - g'(x^2) \leq g'(x) - g'(x^3)$  για κάθε  $x \in (0, 1]$ .

v) Να αποδείξετε ότι  $\int_0^1 g(e^{e^x}) dx > \frac{e^2 - 1}{2}$ .