

Δίνεται συνεχής συνάρτηση  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει

$$\int_t^{t+1} (2g(x))^2 dx + 8 \int_{t+1}^t e^x g(x) dx \leq 2e^{2t} (1 - e^2).$$

i) Να βρείτε τη συνάρτηση  $g$ .

Επιπλέον, δίνεται η συνάρτηση  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει

$$f(e^x) = g^2(x) - 2xg(x) + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

ii) Να αποδείξετε ότι  $f(x) = x^2 - 2x \ln x + 1$ ,  $x > 0$ .

iii) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία, τα κοίλα, τα σημεία καμπής και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

iv) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα  $I(\lambda) = \int_{\lambda}^1 |f(x) - 2| dx$ ,  $\lambda \in (0, 1)$  και στη

συνέχεια να βρεθεί το  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} I(\lambda)$ .

v) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  που περικλείεται από τις  $C_\varphi, C_h$  και την

$$\text{ευθεία } y = 2, \text{ όπου } \varphi(x) = \begin{cases} f(x), & x > 0 \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma \nu \nu x dx, & x = 0 \end{cases} \text{ και } h(x) = g(-x), x \in \mathbb{R}.$$