

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = x^2 + 2\ln x - 1$ ,  $x > 0$  και  $g(x) = 4x(x + \alpha)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  με  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ . Ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(-36x)}{g(x)} = \alpha - 6$ .

i) Να δείξετε ότι  $\alpha = 3$ .

ii) Αν η εφαπτομένη ( $\varepsilon$ ) που διαπερνά τη  $C_f$  στο σημείο  $M(x_1, f(x_1))$  εφάπτεται της  $C_g$  στο σημείο  $N(x_2, g(x_2))$ , να βρεθούν τα σημεία  $M, N$ .

iii) Έστω  $\Omega$  το χωρίο που περικλείεται από τις  $C_g, C_h$  και την ευθεία ( $\varepsilon$ ), όπου  $h(x) = \begin{cases} f(x) - 2\ln x + 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ . Να δείξετε ότι ο άξονας  $y'y$  χωρίζει το χωρίο  $\Omega$  σε δύο χωρία των οποίων ο λόγος των εμβαδών τους είναι  $\frac{2}{1}$ .

iv) Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{ef(e^{x-1}) - 3e^x + 3e}{eg(e^{x-1} - 2) - 4e^x + 12e} + \eta\mu \frac{1}{x-1} \right)$ .