Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν

- $\left(\ln|f(x)|\right)^3-3\ln|f(x)|+3x=6$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $f(\alpha)>0$ για κάποιο $\alpha\in\mathbb{R}$

i) Να δείξετε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii) Αν $f(\mathbb{R})=(0,+\infty)$, να αποδείξετε ότι η $f$ αντιστρέφεται και να βρεθεί η $f^{-1}$.

Δίνεται $g(x)=f^{-1}(x)=-\dfrac{1}{3}(\ln x)^3+\ln x+2$ , $x>0$

iii) Να μελετήσετε την $g$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

iv) Να λυθεί η εξίσωση $g(x)=\dfrac{8}{3}$.

v) Επιπλέον, δίνεται η συνάρτηση $\Phi(x)=(x-e)g\left(\dfrac{x}{e}\right)+(x-1)g(x)$ , $x\in[1,e]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,e)$ ώστε $\Phi'(\xi)=4$.

vi) Να αποδείξετε ότι $-3(e-e^{e^{-2}})<\displaystyle\int_{\rho_1}^{\rho_2}xe^x g'(x)dx<e^e-e^{e^{-2}}$ , όπου $\rho_1,\rho_2$ οι ρίζες της εξίσωσης $g(x)=\dfrac{8}{3}$ με $\rho_1<\rho_2$.