

26. Β. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$G(x) = \begin{cases} x^2 \ln 2x + \beta x + \gamma, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \text{ και}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x \ln 2x + x + 1, & x > 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}, a \in \mathbb{R}.$$

B₁ Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ αν η συνάρτηση g είναι συνεχής και η G παραγωγίσιμη στο 0 με $G'(0) = 1$.

B₂ Αν $\alpha = \beta = \gamma = 1$, να αποδείξετε ότι:

i) η συνάρτηση G είναι αρχική της g στο $[0, +\infty)$.

ii) υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $2\xi \ln 2\xi = \frac{1}{2} - \xi$.

iii) υπάρχει $x_0 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $G(x_0) = \frac{5}{4}$.

iv) υπάρχουν $\rho_1, \rho_2 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ τέτοια, ώστε $\frac{1}{g(\rho_1)} + \frac{1}{g(\rho_2)} = 2$.

B₃ Να δείξετε ότι:

i) η G είναι κυρτή στο $\left[\frac{1}{2e^2}, +\infty\right)$.

ii) ισχύει $(x+1) \cdot G(x) < G(x^2) + x(2 + \ln 2)$ για κάθε $x > 1$.

$$B_1. \quad \lim_{x \rightarrow 0} (2x \ln 2x) \stackrel{2x=u}{=} \lim_{u \rightarrow 0} (u \cdot \ln u) \stackrel{0(-\infty)}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln u}{u^{-1}} \stackrel{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{-1 u^{-2}} =$$

$$= -\lim_{u \rightarrow 0} u = 0$$

onore $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (2x \ln 2x + x + 1) = 0 + 0 + 1 = 1$. g convergeas as 0, onore

$g(0) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$, onore $a = 1$. Eniguz, g convergeas as $(3+)$
(nupuz convergeas)

Eniguz

$$G'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{G(x) - G(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \ln 2x + bx + \gamma - 1}{x}$$

$$\phi(x) = \frac{x^2 \ln 2x + bx + \gamma - 1}{x} \Leftrightarrow x \phi(x) = x^2 \ln 2x + bx + \gamma - 1 \Leftrightarrow$$

$$\gamma - 1 = x \phi(x) - x^2 \ln 2x - bx$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\gamma - 1) = \lim_{x \rightarrow 0} (x \phi(x) - x^2 \ln 2x - bx) \Leftrightarrow \gamma - 1 = 0 \cdot 1 - 0 - b \cdot 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\gamma = 1}$$

Onore $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \ln 2x + bx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x \ln 2x + b) = 0 + b = b$

$G'(0) = 1$, apa $b = 1$, onore $a = b = \gamma = 1$

B₂, i) 0.v.d.o $G'(x) = f(x) \quad \forall x \in [0, +\infty)$

$\forall x \in (0, +\infty)$ gilt $G'(x) = (x^2 \ln 2x + x + 1)' = 2x \ln 2x + x^2 \frac{2}{2x} + 1 =$
 $= 2x \ln 2x + x + 1 = f(x)$

Für $x=0$ $G'(0) = 1 = f(0)$

Apa, $G'(x) = f(x) \quad \forall x \in [0, +\infty)$, somit G approximiert f auf $[0, +\infty)$.

ii) $2\zeta \ln 2\zeta = \frac{1}{2} - \zeta \Leftrightarrow 2\zeta \ln 2\zeta + \zeta + 1 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow f(\zeta) = \frac{3}{2}$

f stetig auf $[0, 1]$

$f(0) = 1, f(1) = 2 \ln 2 + 2 > 2 \quad (\ln 2 > 0)$

$\frac{3}{2} \in (f(0), f(1))$, also nach d.E.T. undurchf. 1. Zwischenw. $\zeta \in (0, 1)$

wobei $f(\zeta) = \frac{3}{2}$

iii) G stetig auf $[0, \frac{1}{2}]$ $G(0) = 1, G(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} \ln 1 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{2}$

$\frac{5}{4} \in (G(0), G(\frac{1}{2}))$, also nach d.E.T. undurchf. 1. Zwischenw. $x_0 \in (0, \frac{1}{2})$

wobei $G(x_0) = \frac{5}{4}$

iv) 0.M.T. für f auf G auf $[0, x_0]$

$G'(p_1) = \frac{G(x_0) - G(0)}{x_0 - 0} \Leftrightarrow f(p_1) = \frac{\frac{5}{4} - 1}{x_0} \Leftrightarrow f(p_1) = \frac{1}{4x_0} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x_0 = \frac{1}{f(p_1)} \quad (1), \text{ wobei } p_1 \in (0, x_0)$

OUT für nur G ab $[x_0, \frac{1}{2}]$

$$G'(p_2) = \frac{G(\frac{1}{2}) - G(x_0)}{\frac{1}{2} - x_0} \Leftrightarrow f(p_2) = \frac{\frac{3}{2} - \frac{5}{4}}{\frac{1}{2} - x_0} \Leftrightarrow$$

$$f(p_2) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2} - x_0} \Leftrightarrow f(p_2) = \frac{1}{2 - 4x_0} \Leftrightarrow 2 - 4x_0 = \frac{1}{f(p_2)}, \text{ also } p_2 \in (\frac{1}{2}, 1)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow 4x_0 + 2 - 4x_0 = \frac{1}{f(p_1)} + \frac{1}{f(p_2)} \Rightarrow \frac{1}{f(p_1)} + \frac{1}{f(p_2)} = 2.$$

B₃. $G'(x) = f(x), x \in [0, +\infty)$

$$G''(x) = f'(x) = 2 \ln 2x + 2x \cdot \frac{2}{2x} + 1 = 2 \ln 2x + 3.$$

$$G''(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2 \ln 2x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow \ln 2x \geq -\frac{3}{2} \Leftrightarrow 2x \geq e^{-\frac{3}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2} e^{-\frac{3}{2}}$$

$$G''(x) < 0 \quad \forall x \in (0, \frac{1}{2} e^{-\frac{3}{2}})$$

x	0	$\frac{1}{2} e^{-\frac{3}{2}}$	$+\infty$
$G''(x)$	-	0	+
G'		$\searrow$	$\nearrow$
G		$\cap$ zu $\cup$	

$$G \text{ wachst ab } [\frac{1}{2e^{\frac{3}{2}}}, +\infty)$$

$$ii) \quad x G(x) + G(x) < G(x^2) + x(2 + \ln 2) \quad \Leftrightarrow$$

$$x(G(x) - G(1)) < G(x^2) - G(x)$$

Dann für nur G auf $[1, x]$

$$G'(\xi_1) = \frac{G(x) - G(1)}{x - 1}, \quad \text{wobei } \xi_1 \in (1, x)$$

Dann für nur G auf $[x, x^2]$

$$G'(\xi_2) = \frac{G(x^2) - G(x)}{x^2 - x}, \quad \text{wobei } \xi_2 \in (x, x^2)$$

Aus D.S. so $x \cdot (x-1) G'(\xi_1) < (x^2-x) G'(\xi_2)$

$$\Leftrightarrow \cancel{x \cdot (x-1)} G'(\xi_1) < \cancel{x \cdot (x-1)} G'(\xi_2) \quad \xrightarrow{x > 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow G'(\xi_1) < G'(\xi_2) \quad \text{Nun existiert wegen } 1 < \xi_1 < \xi_2$$

$$(\text{wobei } G' \uparrow \left(G \text{ wachsend auf } \left[\frac{1}{2e^{3/2}}, \infty \right) \right))$$

$$x > 1 > 0 \\ 1 < x \Rightarrow 1 < x < x^2$$