

Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και 1-1 για την οποία ισχύει:

$$f(0) + f(1) + f(2) = 0.$$

1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα.
2. Αν επιπλέον η f είναι περιττή, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τρεις τουλάχιστον πραγματικές ρίζες, ρ_1, ρ_2, ρ_3 με $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$, $\rho_1 + \rho_3 = 0$ και $\rho_3 \in (1, 2)$.