

1. Δίνονται οι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f και g για τις οποίες ισχύουν:

- $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Οι γραφικές τους παραστάσεις τέμνονται στο $A(2, -1)$.
- $\rho_1 = -1$ και $\rho_2 = 5$ είναι δύο διαδοχικές ρίζες της $g(x) = 0$.

Να αποδείξετε ότι:

α) η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

β) $g(x) < 0$ για κάθε $x \in (-1, 5)$.

γ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(3) \cdot x^4 + 2x^2 + 1}{g(2) \cdot x^3 + 5} = -\infty$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο: $f(x) = 2x^4 + 3\ln x + 1$.

i. Να εξετάσετε ως προς τη μονotonία τη συνάρτηση f .

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

iii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει μοναδική ρίζα.

iv. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός $\lambda > 0$ για τον οποίο ισχύει:

$$\lambda^4 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \ln \frac{1}{\lambda}$$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση: $2f^3(x) - 3 = 2x - 3f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

ii. Αν το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .

iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

iv. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} .

4. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(-1, 0)$ και $B(2, 3)$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Να βρείτε το πρόσημο της f .

iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(2e^x + 1) = 3$.

iv. Να λύσετε την ανίσωση $f(3x + 5) \leq 0$.

5. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο $[-3,3]$ για την οποία ισχύει $3x^2 + 4f^2(x) = 27$ για κάθε $x \in [-3,3]$.

i. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$.

ii. Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα $(-3,3)$.

iii. Να βρεθεί ο τύπος της f .

iv. Αν επιπλέον $f(1) = \sqrt{6}$ να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \frac{3\sqrt{3}}{2}}{x}$.

6. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\sqrt{x^2 + 2x + 9} \leq 3 + xf(x) \leq x^8 \eta \mu \frac{2}{x} + \frac{x}{3} + 3 \text{ για κάθε } x > 0. \text{ Να βρείτε:}$$

i. Το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 9} - 3}{2x}$.

ii. Το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^7 \eta \mu \frac{2}{x} \right)$.

iii. Το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

iv. Το $f(0)$.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $(f \circ f)(x) + 2f(x) = 2x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(2) = 5$.

i. Να βρείτε το $f(5)$.

ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

iii. Να βρείτε το $f^{-1}(2)$.

iv. Να λύσετε την εξίσωση: $f(f^{-1}(2x^2 + 7x) - 1) = 2$.

8. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f^2(x) = \alpha^{2x} + 2\alpha^x + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}^+.$$

i. Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

ii. Αν $f(0) = -2$ να βρείτε τον τύπο της f .

iii. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2f(x) - 3^x}{3 \cdot 2^x + 4 \cdot 3^x}$, $\alpha < 2$.

iv. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2f(x) - 3^x}{3 \cdot 2^x + 4 \cdot 3^x}$, $\alpha > 3$.

9. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $x^4 + 1 \leq 4f(x) \leq x^4 + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{4} \leq f(0) \leq \frac{1}{2}$ και $\frac{1}{2} \leq f(1) \leq \frac{3}{4}$.
 - Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \left[x^4 f\left(\frac{1}{x}\right) \right]$.
 - Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 f\left(\frac{1}{x}\right) + 4\eta\mu 3x}{2x^2 + 3\eta\mu x}$.
 - Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [0, 1]$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) - \xi = 0$.
10. i. Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x) - 4}{x} = 2$ να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
- Δίνεται η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $xg(x) + 2 \leq 2\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x + x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$, αν είναι γνωστό ότι υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.
 - Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f^2(x) + \eta\mu^2(2x)}{\epsilon\varphi^2 x + x^2 g(x)}$
11. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $3f(x) + 2f^3(x) = 4x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την f^{-1} .
 - Να αποδείξετε ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.
 - Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} .
 - Να λυθεί η εξίσωση: $f(2e^{x-1}) = f(3-x)$.
12. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x+1} - 1$ και $g(x) = 2 - x$.
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και g .
 - Να ορισθεί η συνάρτηση $f \circ g$.
 - Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .
 - Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της συνάρτησης $f \circ f \circ g$.

13. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} \frac{2x + \kappa\eta\mu x}{x - x^2}, & x < 0 \\ \lambda, & x = 0 \\ \sqrt{8x^2 + x + 16} - 3x, & x > 0 \end{cases}$

i. Να βρείτε τα κ, λ .

ii. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

iii. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

iv. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2\ln(8x+1)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

14. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{4(x^3 - 2x^2)}, & x \in (-\infty, 0) \cup (0, 2) \\ \frac{\kappa x + 1}{2(x^2 - 4)}, & x \in (2, +\infty) \end{cases}$

και η $g: R - \{0,1\} \rightarrow R$ για την οποία ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x \cdot g(x) + 2x}{3x} = 5$ και

$g(x+3) = g(x) + f(x)$ για κάθε $x \in R$.

Να βρείτε:

i. Το κ αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

ii. Το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

iii. Το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.

iv. Το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$.

15. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 3\ln 2x + e^{3x} + 4x - 2$.

i. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία την f .

ii. Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

iii. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = e^{\frac{3}{2}}$.

iv. Να βρείτε τον πραγματικό θετικό αριθμό μ για το οποίο ισχύει:

$$3\ln 4\mu - 3\ln(2\mu^2 + 2) - 4(\mu^2 + 1) = e^{3(\mu^2 + 1)} - e^{6\mu} - 8\mu$$

16. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: R \rightarrow R$ για την οποία ισχύουν οι συνθήκες:

- $|3\eta\mu x - 2xf(x)| \leq \frac{1}{2}x^2$, για κάθε $x \in R$.

- $4f(x) + 3f(x+1) = 2x^2 - 2013$, για κάθε $x \in R$.

i. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

ii. Να βρείτε το $f(1)$.

iii. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = x - 1$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0,1)$.

17. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

$\kappa \eta \mu^2 x = x^2 f(x) + \sqrt{1 + \eta \mu^2 x} - \lambda$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

i. Να βρείτε τα κ και λ .

ii. Αν $\kappa = 1$ και $\lambda = 1$ να βρείτε την f .

iii. Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sin x}$.

18. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x^3 \cdot 2^x + 3 \cdot 2^x - 4}{2^x}$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

iii. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

iv. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο $\mathbb{R}$ για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$.