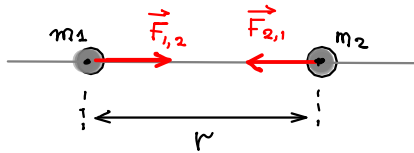


Βαρυτικές Δυνάμεις — Βαρυτικό πεδίο

Πεδίο Βαρύτητας της Γης (Π.Β.Γ.)

Βαρυτικές δυνάμεις είναι οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης μεταξύ μαζών.

Νόμος της παγκόσμιας έλξης (Newton)



Διεύθυνση: Η διάκεντρος των μαζών (κεντρικές).

Φορά: Πάντα **ελκτικές**.

Μέτρο: $|\vec{F}_{1,2}| = |\vec{F}_{2,1}| = F$ (δράση-αντίδραση)

Σταθερά της παγκόσμιας έλξης (στο S.I.)

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$$

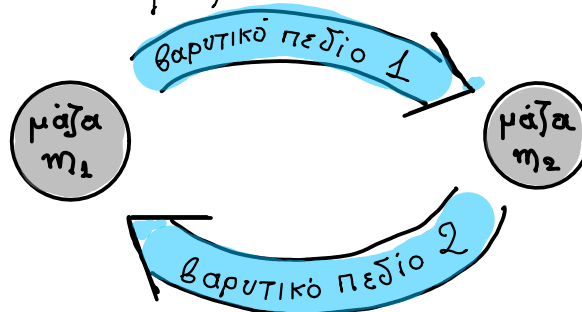
[Σημειακές μάζες
ή ομογενείς - συμπαγείς
σφαίρες]

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

Βαρυτικό πεδίο

Ονομάζεται ο χώρος που ασκεί (βαρυτική) δύναμη σε κάθε μάζα (υπόθεμα) που βρίσκεται μέσα σ' αυτόν.

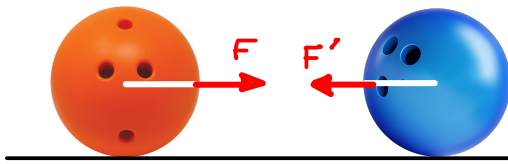
Κάθε μάζα (πηγή πεδίου) δημιουργεί γύρω της βαρυτικό πεδίο, το οποίο ασκεί βαρυτική δύναμη σε οποιαδήποτε άλλη μάζα (υπόθεμα).



Το δημιουργούμενο πεδίο εκτείνεται θεωρητικά σε άπειρη απόσταση από τη μάζα-πηγή. Στην πράξη, όσο απομακρυνόμαστε από την πηγή εξασθενεί και σε πολύ μεγάλες αποστάσεις γίνεται αμελητέο.

Οι βαρυτικές δυνάμεις μεταξύ αντικειμένων της καθημερινής ζωής

Ας θεωρήσουμε δύο μπάρες του bowling ($m_1 = m_2 = 4 \text{ kg}$), σε απόσταση $r = 1 \text{ m}$.



Οι αμοιβαίες έλξεις έχουν μέτρο:

$$F = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 4^2}{1^2} \text{ N} \approx 27 \cdot 10^{-11} \text{ N}$$

$$(F \approx 0,00000000027 \text{ N})$$

και προφανώς είναι αήμενες σε σύγκριση με το βάρος, τις δυνάμεις στήριξης, τριβές κλπ. που ασκούνται στα σώματα -

Το βάρος των σωμάτων

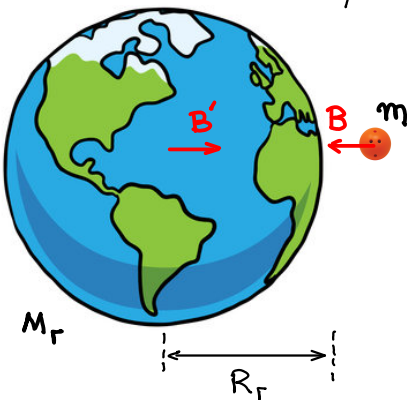
Βάρος $\vec{B}$ ενός σώματος ονομάζεται η βαρυτική έλξη που ασκεί ο πλανήτης Γη σε οποιοδήποτε σώμα βρίσκεται κοντά του.

Πρόκειται δηλαδή για αμοιβαία έλξη μεταξύ μαζών, μόνο που η μια από τις δύο μάζες είναι ... μεγέλη!

Η μάζα και η ακτίνα της Γης είναι: $M_T = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ και

$$R_T = 6370 \text{ km} \approx 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}.$$

Έτσι, η έλξη που δέχεται η μπάρα του bowling ($m = 4 \text{ kg}$) από την Γη (όταν βρίσκεται στην επιφάνειά της) είναι:



$$B = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \cdot 4}{(6,37 \cdot 10^6)^2} \text{ N} \approx 39,25 \text{ N}$$

$$(\text{πράγματι: } B = m \cdot g = 4 \cdot 9,81 \text{ N} = 39,25 \text{ N})$$

Οι βαρυτικές δυνάμεις στον μικρόκοσμο

Στον σχηματισμό των ατόμων και μορίων, στη δομή της ύλης (στερεά, υγρά, αέρια) κλπ. παίζουν ρόλο όπως γνωρίζουμε

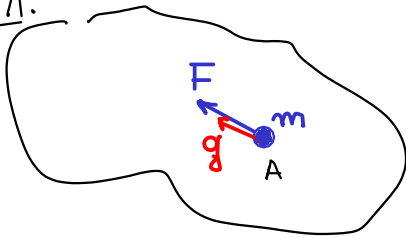
οι ηλεκτρικές δυνάμεις μεταξύ των φορτισμένων στοιχειωδών

4

Στοιχεία του βαρυτικού πεδίου

1) Ένταση, $\vec{g}$

Β.Π.



Μια μάζα m μέσα σε Β.Π. δέχεται δύναμη $\vec{F}$.
 F, m ανάλογα $\rightarrow \frac{F}{m} = \text{σταθ.}$ σε κάθε σημείο A του Β.Π.

Ορισμάται ένταση $\vec{g}$ στο A :

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Σ.Ι.: $1 \frac{N}{kg}$

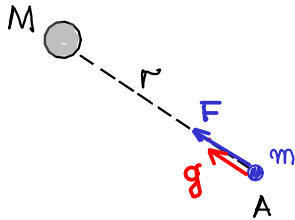
Διεύθυνση-φορά της $\vec{g}$: Ίδια με της $\vec{F}$

Μέτρο: $g = \frac{F}{m} = \text{σταθ.}$

Εκφράζει: τη δύναμη ανά μονάδα μάζας που μπορεί να ασκεί το Β.Π. σε κάθε σημείο του A .

Υπολογισμός του μέτρου της $\vec{g}$

αν γνωρίσουμε τη μάζα-πηγή M :



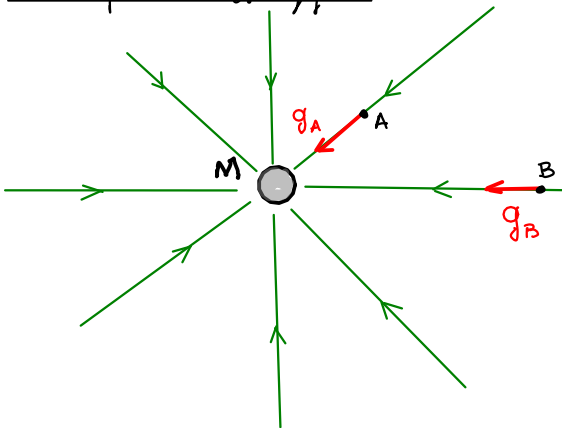
$$g = \frac{F}{m} = \frac{G \frac{M \cdot m}{r^2}}{m} \rightarrow$$

$$g = G \frac{M}{r^2}$$

Αν έχουμε πολλές πηγές:

$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \dots \quad (\text{συνισταμένη})$$

2) Δυναμικές γραμμές



* Σε κάθε σημείο τους η ένταση $\vec{g}$ είναι εφαπτομένη.

* Όσο πυκνότερες είναι τόσο μεγαλύτερη η ένταση g ($g_A > g_B$)

* Καταλήγουν στη μάζα-πηγή M .

Βαρυτική δυναμική ενέργεια

Οι βαρυτικές δυνάμεις είναι **συντηρητικές**. Έτσι, ένα σύστημα δύο μαζών m_1, m_2 που βρίσκονται σε απόσταση r , περικλείει δυναμική ενέργεια U που δίνεται από τη σχέση:



$$U = -G \frac{m_1 \cdot m_2}{r}$$

- * Ως **σημείο αναφοράς** στην πιο πάνω σχέση θεωρείται η άπειρη απόσταση (Δηλαδή αν $r \rightarrow \infty$ τότε $U = 0$)
- * Εκφράζει το συνολικό έργο των βαρυτικών αλληλεπιδράσεων αν οι δύο μάζες μετακινηθούν από απόσταση r σε άπειρη απόσταση:

$$U_{(r)} = W_{\text{πεδίου}}^{r \rightarrow \infty} = -G \frac{m_1 m_2}{r} < 0$$

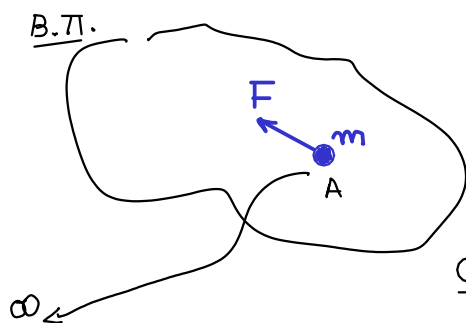
- * Είναι πάντα **αρνητική**, διότι οι δυνάμεις είναι πάντα ελκτικές, επομένως το πεδίο καταναλώνει έργο κατά την απομάκρυνση. Πρέπει δηλαδή να προσφέρουμε εξωτερική ενέργεια για να τις απομακρύνουμε.

Μέσω της δυναμικής ενέργειας και του έργου στο βαρυτικό πεδίο, ορίζονται δύο ακόμα χαρακτηριστικά μεγέθη – ιδιότητες του Β.Π.:

- 3) Το δυναμικό V_A σε κάθε σημείο.
- 4) Η διαφορά δυναμικού V_{AB} ανάμεσα σε δύο σημεία.

6

3) Δυναμικό, V_A



Αν μια μάζα m φρεθεί σε σημείο A του Β.Π. τότε έχει δυναμική ενέργεια $U_A = W_{\text{πεδίου}}^{A \rightarrow \infty}$

U_A , η ανάλογα $\rightarrow \frac{U_A}{m} = \text{σταθ. σε κάθε σημείο } A \text{ του Β.Π.}$

Ονομάζεται δυναμικό V στο A :

$$V_A = \frac{U_A}{m}$$

Σ.Ι.: $1 \frac{\text{Joule}}{\text{kg}}$

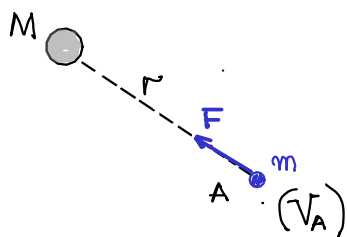
Εκφράζει: τη δυναμική ενέργεια ανά μονάδα μάζας που μπορεί να περικλείει το Β.Π. σε κάθε σημείο του A .

Ισοδύναμος ορισμός:

$$V_A = \frac{W_{\text{πεδίου}}^{A \rightarrow \infty}}{m}$$

Υπολογισμός του δυναμικού V_A

αν γνωρίζουμε τη μάζα-πηγή M :

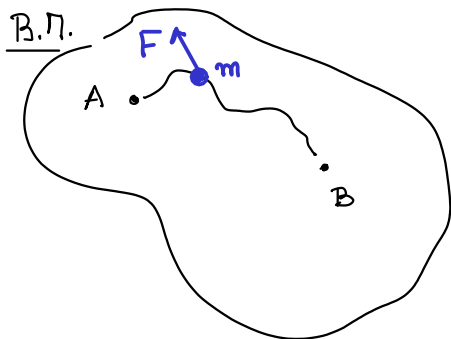


$$V_A = \frac{U_A}{m} = \frac{-G \frac{M \cdot m}{r}}{m} \rightarrow V_A = -G \frac{M}{r}$$

Αν έχουμε πολλές πηγές:

$$V_A = V_{1A} + V_{2A} + \dots \quad (\text{αλγ. άθροισης})$$

4) Διαφορά δυναμικού, V_{AB}



Αν μάζα m μετακινηθεί από σημείο A σε άλλο B , το Β.Π. παράγει $W_{\text{πεδίου}}^{A \rightarrow B}$.

W_{AB} , η ανάλογα $\rightarrow \frac{W_{AB}}{m} = \text{σταθ.}$

Ονομάζεται διαφορά δυναμικού V_{AB} , από το A στο B :

$$V_{AB} = \frac{W_{\text{πεδίου}}^{A \rightarrow B}}{m}$$

Για το έργο μιας συντηρητικής δύναμης ισχύει πάντα:

$$W_{AB} = U_A - U_B = -\Delta U$$

Οπότε ισχύει:

$$V_{AB} = \frac{W_{AB}}{m} = \frac{U_A - U_B}{m} = V_A - V_B$$

Στην πράξη χρησιμοποιούμε,

* Την ένταση $\vec{g}$ για να βρούμε τη δύναμη $\vec{F}$ που ασκεί το Β.Π. σε μια μάζα m :

$$\vec{F} = \vec{g} \cdot m$$

* Το δυναμικό V_A για να βρούμε τη δυναμική ενέργεια U_A μιας μάζας m στο Β.Π.:

$$U_A = V_A \cdot m$$

* Την διαφορά δυναμικού V_{AB} για να βρούμε το έργο του πεδίου W_{AB} όταν μια μάζα m μετακινείται μέσα στο Β.Π.:

$$W_{A \rightarrow B} = V_{AB} \cdot m = (V_A - V_B) \cdot m$$

* Αν η μάζα m κινείται μόνο με την επίδραση του Β.Π., μπορούμε να εφαρμόσουμε την ΑΔΜΕ:

$$U_A + K_A = U_B + K_B \rightarrow V_A \cdot m + \frac{1}{2} m v_1^2 = V_B \cdot m + \frac{1}{2} m v_2^2$$

* Γενικότερα, μπορούμε να εφαρμόσουμε το ΘΜΚΕ:

$$\Sigma W = \Delta K \rightarrow W_{\text{εξ.}} + W_{\text{πεδίου AB}} = K_B - K_A$$

$$\left((V_A - V_B) \cdot m \right)$$

Σύγκριση βαρυτικών και ηλεκτρικών δυνάμεων

Α) Ομοιότητες

- * Είναι δυνάμεις κεντρικές
- * Είναι ανάλογες των υποθεμάτων (μαζών ή φορτίων)
- * Ακολουθούν το νόμο του αντιστρόφου τετραγώνου (απόστασης)
- * Είναι συντηρητικές.

Β) Διαφορές

Βαρυτικές	Ηλεκτρικές
Πάντα <u>ελκτικές</u>	Ελκτικές ή <u>απωστικές</u>
Στα στοιχειώδη σωματίδια: <u>Ασθενείς</u>	<u>Ισχυρές</u>
<u>Κυριαρχούν</u> : Στον <u>μακρόκοσμο</u>	Στον <u>μικρόκοσμο</u>
<u>Παίζουν ρόλο</u> : Κινήσεις ουράνιων σωμάτων, κινήσεις δορυφόρων, Πτώση σωμάτων, κτλ.	Σχηματισμός ατόμων-μορίων Καταστάσεις ύλης (στερεά, υγρά, αέρια) αηπ.

Αναλογίες μεγεθών - σχέσεων

Βαρυτικό πεδίο	Ηλεκτροστατικό πεδίο
(Newton) $F = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$	(Coulomb) $F = k_c \frac{ q_1 \cdot q_2 }{r^2}$
<u>Δυν. ενέργεια</u> : $U_{1,2} = -G \frac{m_1 \cdot m_2}{r}$	$U_{1,2} = k_c \frac{q_1 \cdot q_2}{r}$
<u>ένταση</u> : $\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}$ $g = G \frac{M}{r^2}$	$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$ $E = k_c \frac{ Q }{r^2}$
<u>Δυναμικό</u> : $V_A = \frac{U_A}{m} = \frac{W_{A\infty}}{m}$ $V_A = -G \frac{M}{r}$	$V_A = \frac{U_A}{q} = \frac{W_{A\infty}}{q}$ $V_A = k_c \frac{Q}{r}$
<u>Διαφορά δυναμικού</u> : $V_{AB} = \frac{W_{AB}}{m}$ $V_{AB} = V_A - V_B$	$V_{AB} = \frac{W_{AB}}{q}$ $V_{AB} = V_A - V_B$

(9)

Βαρυτικό Πεδίο της Γης (ΒΠΓ)

Τα στοιχεία της Γης είναι:

Μάζα: $M_r = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

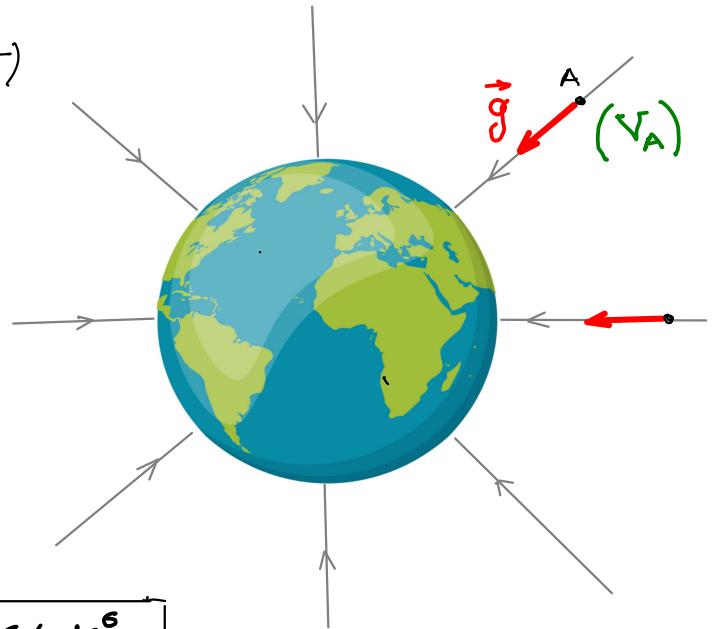
Ακτίνα: $R_r = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$

και τη θεωρούμε συμπαγή

και ομογενή σφαίρα.

Για την ακτίνα της χρησιμοποιούμε την στρογγυλεμένη τιμή:

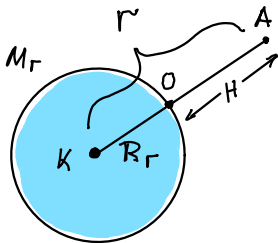
$$R_r \approx 6.400 \text{ km} = 6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$$



Την απόσταση r κάθε σημείου την μετράμε από το κέντρο της Γης.

Έτσι, ένα σημείο A απέχει από το κέντρο K

απόσταση $KA = \boxed{r = R_r + H}$ όπου H το ύψος (από την επιφάνεια)



Ένα σημείο O πάνω στην επιφάνεια της Γης,

απέχει από το K απόσταση $KO = \boxed{r = R_r}$ (αφού $H=0$)

* Δεν θα ασχοληθούμε με το βαρυτικό πεδίο στο εσωτερικό της Γης.

Οι σχέσεις για την ένταση g και το δυναμικό V

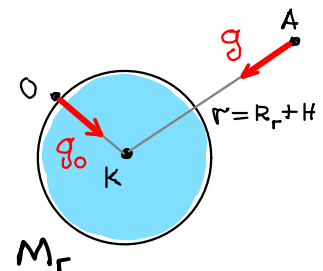
ισχύουν για αποστάσεις $r \geq R_r$

Ένταση $\vec{g}$ στο ΒΠΓ

Η κατακόρυφη διεύθυνση σε κάθε τόπο είναι αυτή που διέρχεται από το κέντρο K της Γης.

Η ένταση $\vec{g}$ σε κάθε σημείο A κατευθύνεται προς το K και το μέτρο της είναι:

$$(r \geq R_r)$$



$$g = \frac{GM_r}{r^2}$$

ή

$$g = \frac{GM_r}{(R_r + H)^2}$$

Στην επιφάνεια της Γης, το μέτρο g_0 της έντασης είναι (για $r=R_r$):

$$\boxed{g_0 = \frac{GM_r}{R_r^2}} \Rightarrow g_0 = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{(6,37 \cdot 10^6)^2} \frac{N}{kg} \Rightarrow \boxed{g_0 \approx 9,81 \frac{N}{kg}}$$

Το βάρος $\vec{B}$ κάθε σώματος (η δύναμη με την οποία το έλκει η Γη), με τη βοήθεια της έντασης $\vec{g}$ του ΒΠΓ, μπορεί να γραφτεί:

$$\vec{g} = \frac{\vec{B}}{m} \rightarrow \boxed{\vec{B} = m \cdot \vec{g}}. \quad \text{Βλέπουμε δηλαδή ότι η ένταση } \vec{g} \text{ του ΒΠΓ συμπίπτει με την επιτάχυνση της βαρύτητας.}$$

(Γι' αυτό εξάλλου χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο $\vec{g}$).

Δυναμικό V στο ΒΠΓ

Σε κάθε σημείο A με $r=R_r+H$:

$$\boxed{V = -\frac{GM_r}{r}} \quad \text{ή} \quad \boxed{V = -\frac{G \cdot M_r}{R_r+H}}$$

Δυναμική ενέργεια
σώματος μάζας m:

$$V_A = \frac{U_A}{m} \rightarrow \boxed{U_A = V_A \cdot m}$$

(ως προς άπειρο)

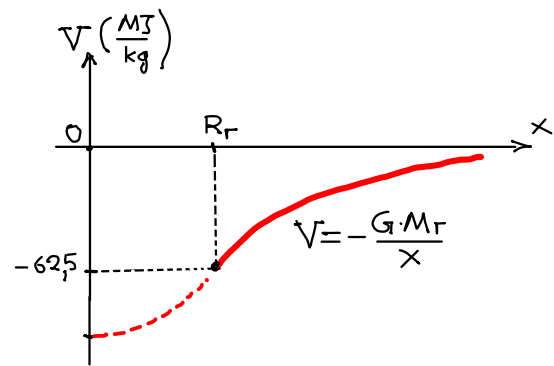
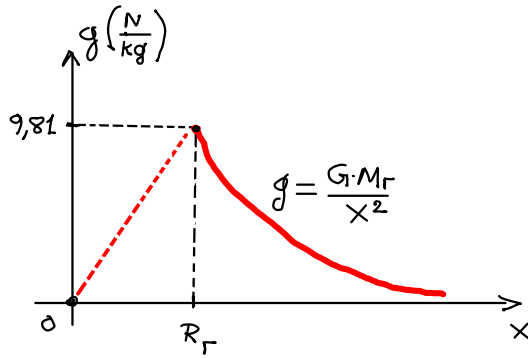
Στην επιφάνεια της Γης ($r=R_r$) το δυναμικό V_0 είναι:

$$\boxed{V_0 = -\frac{GM_r}{R_r}} \Rightarrow V_0 = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{6,37 \cdot 10^6} \frac{Joule}{kg} \Rightarrow \boxed{V_0 = -6,25 \cdot 10^7 \frac{J}{kg}}$$

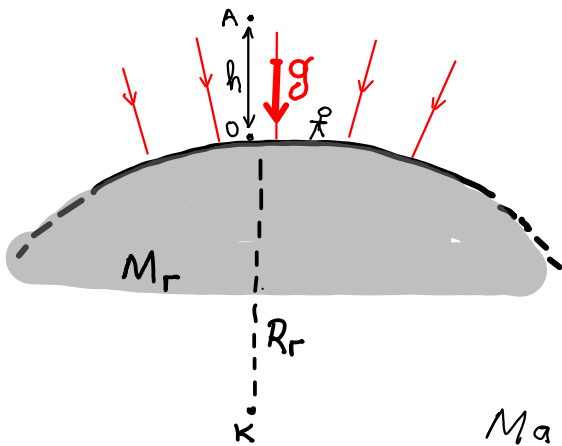
($V_0 = -62,5 \frac{MJ}{kg}$)

Αν δηλαδή θέλουμε να μεταφέρουμε ένα σώμα, μάζας $m=1kg$, από την επιφάνεια της Γης στο άπειρο (πολύ μακριά από τη Γη), θα πρέπει να του προσφέρουμε ενέργεια 62,5 εκατομύρια Joule!

(Έχετε δει εντόξευση διαστημόησιου στη NASA και τις τεράστιες ποσότητες των δαπανωμένων καυσίμων;)



Προσέγγιση που κάνουμε για μικρές αποστάσεις, κοντά στη Γη



Επειδή οι (κατακόρυφες) δυναμικές γραμμές συγκλίνουν πολύ μακριά (στο κέντρο της Γης), μπορούμε να τις θεωρήσουμε παράλληλες. Να θεωρήσουμε δηλαδή ότι τοπικά το BΠΓ είναι ομογενές.

Οπότε: $\boxed{g = g_0 = \text{σταθ.} = 9,81 \frac{\text{N}}{\text{kg}}}$

Μα τότε το βάρος $\vec{B}$ κάθε σώματος στην περιοχή είναι σταθερό $\boxed{\vec{B} = m \cdot \vec{g}_0 = \text{σταθ.}}$

Το έργο του θάρους, π.χ. από Α έως Ο, είναι τότε $\boxed{W_{A0} = B \cdot h = m g_0 h}$

Κανονικά θα έπρεπε να το υπολογίσουμε από τη διαφορά δυναμικού V_{A0} :

$$W_{A0} = V_{A0} \cdot m = (V_A - V_0) \cdot m = \left(-\frac{GM_r}{R_r + h} + \frac{GM_r}{R_r} \right) \cdot m = GM_r m \left(\frac{1}{R_r} - \frac{1}{R_r + h} \right) =$$

$$= \frac{GM_r m (R_r + h - R_r)}{R_r (R_r + h)} = \frac{GM_r \cdot m \cdot h}{R_r \cdot (R_r + h)} \quad \text{Επειδή όμως } h \ll R_r, \text{ άρα } \boxed{R_r + h \simeq R_r}$$

οπότε: $W_{A0} = \frac{GM_r}{R_r^2} m \cdot h \Rightarrow \boxed{W_{A0} = m \cdot g_0 \cdot h}$

$\nearrow$
 g_0

Σε τέτοια προβλήματα δεν χρειάζεται να θεωρήσουμε το άπειρο ως σημείο αναφοράς. Προτιμάμε το χαμηλότερο σημείο, π.χ. το Ο.

Οπότε, η δυναμική ενέργεια ενός σώματος μάζας m , στο A είναι:

$$(\text{ως προς } O) \quad \mathcal{U}'_A = W_{Ao} = m g_0 h$$

$$\left[\text{και το δυναμικό } V'_A \text{ ως προς } O : V'_A = \frac{\mathcal{U}'_A}{m} = g_0 h \right]$$

Παραδείγματα στο ΒΠΓ

- ① Αν η ένταση g_0 στην επιφάνεια της Γης είναι $g_0 = 10 \frac{N}{kg}$, να βρείτε την τιμή της σε ύψος $H = R_r$ από την επιφάνεια.

Λύση:

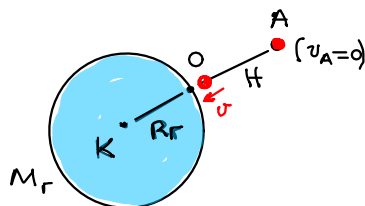
$$\left. \begin{aligned} g &= \frac{GM_r}{(R_r + H)^2} = \frac{GM_r}{(2R_r)^2} = \frac{GM_r}{4R_r^2} \\ \text{και: } g_0 &= \frac{GM_r}{R_r^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{g}{g_0} = \frac{\frac{GM_r}{4R_r^2}}{\frac{GM_r}{R_r^2}} = \frac{1}{4} \rightarrow \boxed{g = \frac{g_0}{4}}$$

ή $\boxed{g = 2,5 \frac{N}{kg}}$

- ② Ένα σώμα αφήνεται να πέσει ελεύθερα, από ύψος $H = R_r$. Αν υποθέσουμε ότι δεν υπάρχει ατμόσφαιρα και πέφτει σε κενό, με ποια ταχύτητα v θα φτάσει στην επιφάνεια της Γης;

Δίνονται: $g_0 = 10 \frac{N}{kg}$, $R_r = 6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$

Λύση:



ΑΔΜΕ από A έως O:

$$\mathcal{U}_A + K_A = \mathcal{U}_O + K_O \rightarrow$$

$$\rightarrow V_A \cdot m + 0 = V_O \cdot m + \frac{1}{2} m v^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{v = \sqrt{2(V_A - V_O)}} \quad ①$$

Υπολογισμός των δυναμικών V_A, V_O :

$$V_A = -\frac{GM_r}{R_r + H} = -\frac{GM_r}{2R_r}$$

$$\text{και: } V_O = -\frac{GM_r}{R_r}$$

Επειδή δόθηκε η g_0 και η R_r έχουμε: $g_0 = \frac{GM_r}{R_r^2} \rightarrow \boxed{GM_r = g_0 R_r^2}$

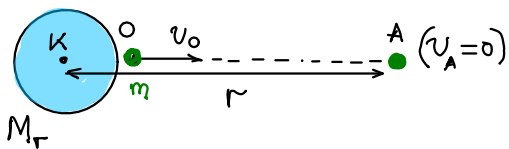
Οπότε τα δυναμικά γίνονται:

$$V_A = -\frac{g_0 R_r^2}{2R_r} \rightarrow \boxed{V_A = -\frac{g_0 R_r}{2}} \quad \text{και} \quad V_0 = -\frac{g_0 R_r^2}{R_r} \rightarrow \boxed{V_0 = -g_0 R_r}$$

και τελικά, από ① $\rightarrow v = \sqrt{2\left(-\frac{g_0 R_r}{2} + g_0 R_r\right)} = \sqrt{g_0 R_r} \Rightarrow$

$$\Rightarrow v = \sqrt{10 \cdot 6,4 \cdot 10^6} \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \text{ή} \quad \boxed{v = 8000 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \quad \left(8 \frac{\text{km}}{\text{s}}!\right)$$

③ Ταχύτητα διαφυγής



Σώμα μάζας m αποκτάει πολύ κοντά στη Γ_η (σημείο Ο) αρχική ταχύτητα v_0 (σχήμα). Υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει ατμόσφαιρα, οπότε το σώμα απομακρύνεται από τη Γ_η, επιβραδυνόμενο από το βάρος του.

Όσο μεγαλύτερη είναι η αρχική του ταχύτητα v_0 , τόσο μεγαλύτερη θα είναι και η απόσταση r όπου θα μηδενιστεί η ταχύτητά του, και στη συνέχεια θα επιστρέψει στη Γ_η.

Υπάρχει άραγε κάποια οριακή τιμή της ταχύτητας v_0 , πέρα από την οποία το σώμα να μην επιστρέψει πίσω στη Γ_η;

(Να φτάσει δηλαδή θεωρητικά σε άπειρη απόσταση;)

Λύση:

Εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ από το Ο μέχρι το σημείο Α όπου μηδενίζεται η ταχύτητα του σώματος:

$$\begin{aligned} U_0 + K_0 &= U_A + K_A \rightarrow V_0 \cdot m + \frac{1}{2} m v_0^2 = V_A \cdot m + \frac{1}{2} m v_A^2 \rightarrow \\ &\rightarrow -\frac{GM_r}{R_r} \cdot m + \frac{1}{2} m v_0^2 = -\frac{GM_r}{r} \cdot m \rightarrow \end{aligned}$$

$$\rightarrow -2 \cdot \frac{GM_r}{R_r} + v_0^2 = -2 \frac{GM_r}{r} \rightarrow v_0^2 = 2GM_r \left(\frac{1}{R_r} - \frac{1}{r} \right)$$

Εφόσον θέσουμε να «φτάσει στο άπειρο», δηλαδή $r \rightarrow \infty$
τότε $\frac{1}{r} \rightarrow 0$, οπότε:

$$v_0 \rightarrow \sqrt{\frac{2GM_r}{R_r}}$$

Δηλαδή για τιμές αρχικής ταχύτητας που ξεπερνούν το πιο πάνω όριο, το σώμα δεν επιστρέφει στη Γη.

Εγκαταλείπει το ΒΠΓ, «αποδεσμεύεται» από αυτό, απομακρυνόμενο για πάντα από τη Γη.

Το όριο αυτό ονομάζεται ταχύτητα διαφυγής από ΒΠΓ:

$$v_\delta = \sqrt{\frac{2GM_r}{R_r}}$$

ή αν θέσουμε $g_0 = \frac{GM_r}{R_r^2} \rightarrow GM_r = g_0 R_r^2$
τότε:

$$v_\delta = \sqrt{2g_0 R_r}$$

Με υπολογισμό προκύπτει: $v_\delta = 11,2 \cdot 10^3 \frac{m}{s}$ ή

$$v_\delta = 11,2 \frac{km}{s}$$

(Αν θέβαια το σώμα ξεκινάει όχι από την επιφάνεια της Γης αλλά από κάποιο άλλο σημείο πιο ψηλά, τότε η απαιτούμενη αρχική ταχύτητα για να διαφύγει από το ΒΠΓ είναι μικρότερη)

Για σύγκριση, η ταχύτητα διαφυγής από το βαρυτικό

πεδίο της Σελήνης είναι μόνο $2,4 \frac{km}{s}$,

ενώ από το βαρυτικό πεδίο του Ήλιου είναι $617,5 \frac{km}{s}$!

Δορυφόροι

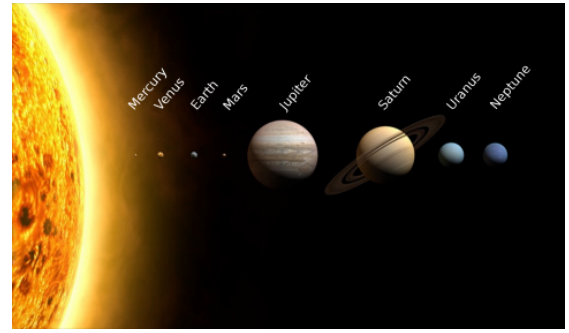
«Δορυφόρο» ονομάζουμε γενικά ένα σώμα, όταν αυτό κινείται γύρω από κάποιο ουράνιο σώμα, με την επίδραση και μόνο της βαρυτικής έλξης.



Γη - Σελήνη



Σύγκριση Δία - δορυφόρων του



Σύγκριση Ήλιου - πλανητών

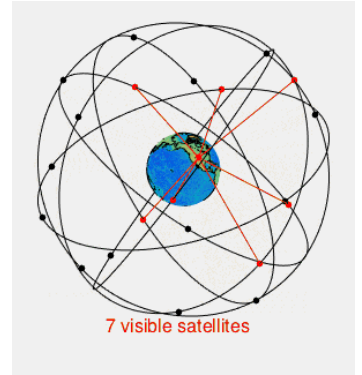
- Π.χ. ● Η Σελήνη είναι δορυφόρος της Γης. Κινείται σε μέση απόσταση 384.400 km από τη Γη, με μέση ταχύτητα $1,0 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ και περίοδο περιστροφής περίπου 28 ημέρες.
- Ο Δίας έχει πάνω από 70 δορυφόρους, με πιο γνωστούς τους Ιώ, Ευρώπη, Καλλιστό, Γανυμήδη.
- Οι πλανήτες του ηλιακού μας συστήματος είναι δορυφόροι του Ήλιου. Η Γη κινείται σε μέση απόσταση 149,6 εκατομύρια km από τον Ήλιο, με μέση ταχύτητα $29,8 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ και περίοδο περιστροφής 365,3 ημέρες.
- Ξδω κοι 70 περίπου χρόνια, με την ανάπτυξη των διαστημικών προγραμμάτων, έχουν τεθεί σε τροχιά γύρω από τη Γη, χιλιάδες τεχνητοί δορυφόροι, σε τροχίες που τα ύψη τους κυμαίνονται μεταξύ 200 - 2000 km για δορυφόρους χαμηλής τροχιάς, ταχύτητες μεταξύ $7,1 - 6,8 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ και περιόδους περιστροφής περίπου 1,4 - 2 h. Το διαστημικό τηλεσκόπιο Hubble κινείται σε ύψος 540 km



Αναπαράσταση ... αντικειμένων που περιφέρονται γύρω από τη Γη

και ο διαστημικός σταθμός (I.S.S.) σε ύψος περίπου 420 km με περίοδο 93 min.

- Σε μεγαλύτερα ύψη υπάρχουν πολλοί δορυφόροι, ιδιαίτερα στο ύψος των 35786 km, όπου η περίοδος περιστροφής είναι ίδια με αυτή της Γης (24 h). Υπάρχουν όμως και δορυφόροι σε ακόμα μεγαλύτερα ύψη.
- Το δορυφορικό σύστημα ηχοήησης GPS (Global Positioning System) χρησιμοποιεί ένα σύνολο 31 δορυφόρων που περιφέρονται γύρω από τη Γη σε ύψος 20180 km, εκπέμποντας πληροφορίες θέσης. Κάθε δέκτης GPS χρειάζεται να λάβει δεδομένα από 4 δορυφόρους για να προσδιορίσει το στιγμιότυπο (τη θέση του) πάνω στη Γη.



- Οι ενεργοί δορυφόροι εκτιμάται ότι είναι σήμερα γύρω στους 2600. Υπάρχουν όμως και ανενεργοί δορυφόροι (κατεστραμμένοι, χαμένοι, κτλ.) που υπολογίζονται πάνω από 3000. Υπάρχουν επίσης, ιδιαίτερα στις χαμηλές τροχιές, και «αντικείμενα» σε τροχιά (διαστημικά «σκουπίδια»), όπως θραύσματα από συγχυρούσεις δορυφόρων, εξαρτήματα, βίδες, κτλ. ! Αυτά τα αντικείμενα κινούνται με ταχύτητες της τάξης των 6,5–7,5 $\frac{km}{s}$ και αποτελούν μεγάλο κίνδυνο για τους ενεργούς δορυφόρους και για τα διαστημικά προγράμματα. Εκτιμάται ότι υπάρχουν 34000 τέτοια «σκουπίδια» με μέγεθος πάνω από 10cm, 900.000 με μέγεθος 1 έως 10cm και εκατομμύρια μικρότερα από 1cm !



Δορυφόροι της Γης

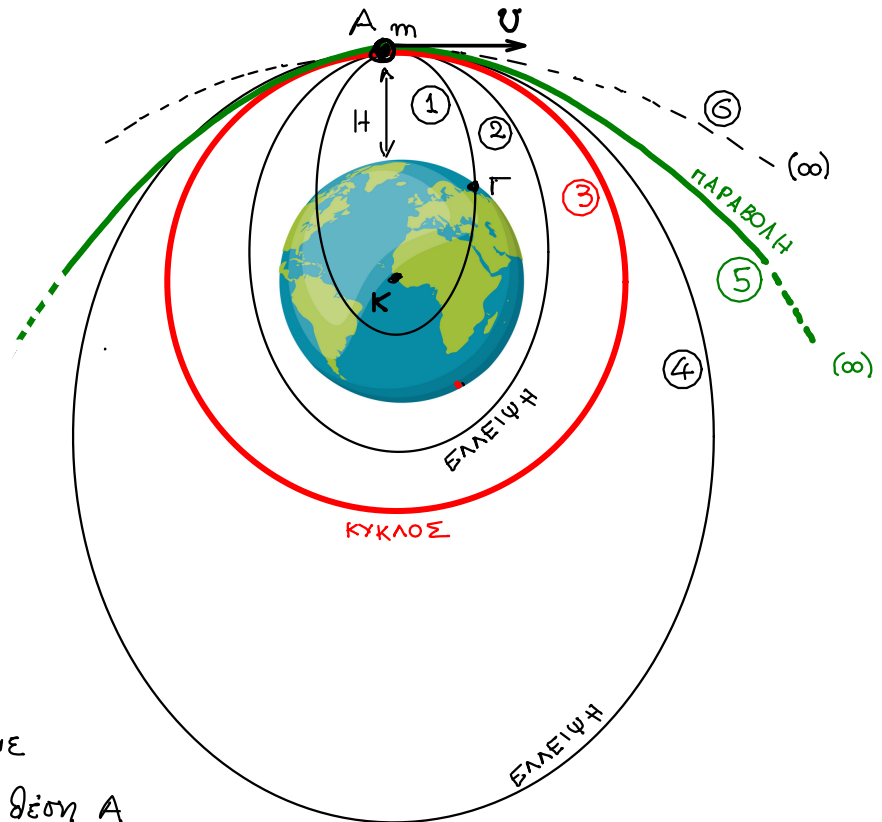
Ας υποθέσουμε ότι ένα σώμα μάζας m , βρίσκεται κάποια στιγμή στο σημείο Α σε ύψος H από την επιφάνεια της Γης και έχει ταχύτητα $\vec{v}$ κάθετη στην απόσταση ΑΚ.

Τότε, ανάλογα με το μέτρο της $\vec{v}$, θα διαγράφει κάποια από τις τροχιές ① έως ⑥.

Συγκεκριμένα,

- Αν η ταχύτητά του είναι ίση με την ταχύτητα διαφυγής από τη θέση Α ($v = v_5 = \sqrt{\frac{2GM_r}{R_r + H}}$), τότε θα διαγράψει παραβολική τροχιά, διαφεύγοντας από το ΒΠΓ και φτάνοντας οριακά σε άπειρη απόσταση ($v_\infty = 0$).
- Για $v > v_5$ η τροχιά του θα είναι υπερβολή. Θα διαφύγει από το ΒΠΓ με $v_\infty > 0$.
- Για $v < v_5$ το σώμα «παγιδεύεται» στο ΒΠΓ. Διαγράφει κάποια ελλειπτική τροχιά (τόσο μικρότερη, όσο μικρότερη η v), που η μια από τις δύο εστίες της συμπίπτει με το κέντρο Κ της Γης.
- Αν η v είναι αρκετά μικρή, τότε η έλλειψη θα τέμνει τη Γη (πχ. τροχιά ①), και το σώμα θα πέσει στην επιφάνειά της (σημείο Γ).
- Τέλος, για κάποια τιμή της ταχύτητας (μικρότερη από τη v_5), η τροχιά του σώματος είναι κυκλική, ακτίνας $\boxed{r = R_r + H}$ (τροχιά ③).

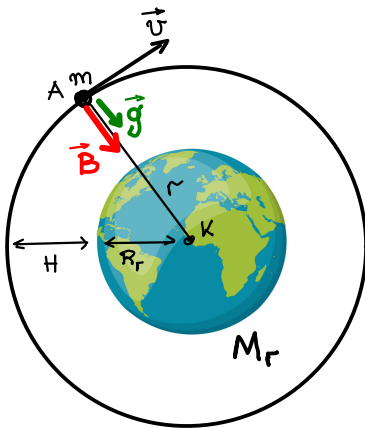
Στη συνέχεια θα μελετήσουμε την κίνηση ενός δορυφόρου μόνο στην περίπτωση της κυκλικής τροχιάς.



Σε όλες τις περιπτώσεις πάντως, μπορούμε να χρησιμοποιούμε την ΑΔΜΕ, αφού το σώμα κινείται με την επίδραση και μόνο του βάρους:

$$U_A + K_A = U_B + K_B \longrightarrow -\frac{GM_r \cdot m}{r_A} + \frac{1}{2} m v_A^2 = -\frac{GM_r \cdot m}{r_B} + \frac{1}{2} m v_B^2$$

Ταχύτητα και περίοδος δορυφόρου σε κυκλική τροχιά



Δορυφόρος μάζας m βρίσκεται σε κυκλική τροχιά ακτίνας $r = R_r + H$. Το βάρος του $\vec{B}$ είναι διαρκώς κάθετο στην $\vec{v}$ και έτσι παίζει ρόλο κεντρομόλου δύναμης:

$$\Sigma F = m \cdot a_k \longrightarrow B = m \cdot a_k \longrightarrow m \cdot g = m \cdot a_k \longrightarrow \boxed{a_k = g} \text{ (1)}$$

1^η παρατήρηση: Η κεντρομόλος επιτάχυνση $\vec{a}_k$ είναι ίση με την ένταση $\vec{g}$ του ΒΠΓ. (Γενικότερα, αν ένα σώμα κινείται μόνο με την επίδραση βαρυτικής έλξης, τότε είναι $\vec{a} = \vec{g}$).

Από τη σχέση (1), θέτοντας $a_k = \frac{v^2}{r}$ και $g = \frac{GM_r}{r^2}$ έχουμε:

$$\frac{v^2}{r} = \frac{GM_r}{r^2} \longrightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{GM_r}{r}}} \quad \text{ή} \quad \boxed{v = \sqrt{\frac{GM_r}{R_r + H}}} \text{ (2)}$$

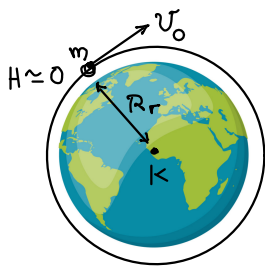
2^η παρατήρηση: Όταν ένας δορυφόρος κινείται σε κυκλική τροχιά, τότε η κίνησή του είναι Ο.Κ.Κ. και το μέτρο της ταχύτητας εξαρτάται μόνο από την ακτίνα $r = R_r + H$ της τροχιάς (δηλ. από το ύψος H).

Η περίοδος στην Ο.Κ.Κ είναι: $T = \frac{2\pi r}{v}$ οπότε λόγω της (2) έχουμε:

$$T = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{GM_r}{r}}} \longrightarrow \boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM_r}}} \quad \text{ή} \quad \boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{(R_r + H)^3}{GM_r}}} \quad (3)$$

3^η παρατήρηση: Η περίοδος T της Ο.Κ.Κ. του δορυφόρου εξαρτάται
κι αυτή μόνο από την ακτίνα $r = R_r + H$.

Δορυφόρος σε πολύ μικρό ύψος ($H \approx 0$, θεωρούμε ότι δεν υπάρχει ατμόσφαιρα).



Αν θέσουμε $H = 0$ στις σχέσεις (2) και (3), έχουμε:

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM_r}{R_r}} = \sqrt{g_0 \cdot R_r} = 7905 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (\text{περίπου } 8 \frac{\text{km}}{\text{s}})$$

$$\text{και } T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{R_r^3}{GM_r}} = 2\pi \sqrt{\frac{R_r}{g_0}} = 5063 \text{ sec} \quad \left(\begin{array}{l} \text{περίπου } 84,4 \text{ min} \\ \text{ή } 1 \text{ h } 24,4 \text{ min} \end{array} \right)$$

[Για σύγκριση, η Σελήνη ($r_\Sigma = 384.400 \text{ km}$) κινείται με ταχύτητα $v_\Sigma = 1,02 \frac{\text{km}}{\text{s}}$
και έχει περίοδο $T_\Sigma \approx 27,3$ ημέρες.]

4^η παρατήρηση: Είδαμε ότι για μια κυκλική τροχιά η απαιτούμενη ταχύτητα
είναι $v_k = \sqrt{\frac{GM_r}{r}}$, ενώ η ταχύτητα διαφυγής από το ίδιο σημείο είναι
 $v_\Delta = \sqrt{\frac{2GM_r}{r}}$. Ισχύει δηλαδή: $v_\Delta = \sqrt{2} \cdot v_k$ ή $v_\Delta \approx 1,4 v_k$

Σύγχρονοι (ή γεωσύγχρονοι) δορυφόροι Γεωσύγχρονες τροχιές - Γεωστατική τροχιά

Από τη σχέση ③ της περιόδου, $T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM_E}}$, αν θέσουμε την τιμή $T = 24 \text{ h} = 86400 \text{ sec}$, βρίσκουμε για την ακτίνα τροχιάς την τιμή $r_\Sigma = 4,22 \cdot 10^7 \text{ m}$ ή $r_\Sigma = 42200 \text{ km}$. Δηλαδή περίπου $r_\Sigma \simeq 6,6 \cdot R_E$.

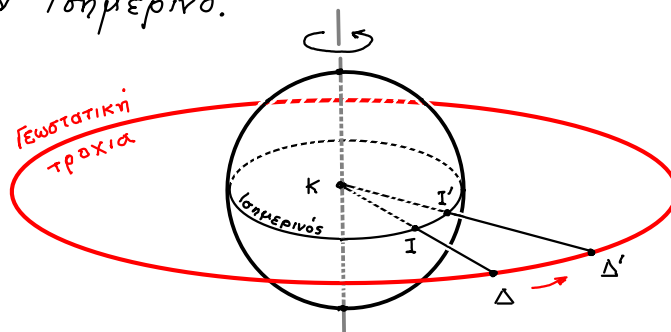
Οι δορυφόροι σε τροχιές αυτής της ακτίνας έχουν ίδια περίοδο με την περίοδο περιστροφής της Γης και οι τροχιές αυτές ονομάζονται γεωσύγχρονες.

Μία από τις τροχιές αυτές έχει άξονα που συμπίπτει με τον άξονα περιστροφής της Γης. Βρίσκεται

δηλαδή στο ίδιο επίπεδο με τον Ισημερινό της Γης.

Η συγκεκριμένη αυτή τροχιά ονομάζεται γεωστατική και οι δορυφόροι σ' αυτήν (περίπου 400 σήμερα) φαίνονται να παραμένουν ακίνητοι πάνω από τα ίδια σημεία του Ισημερινού, αφού στρέφονται μαζί με αυτά στην προέκταση των ίδιων ακτίνων.

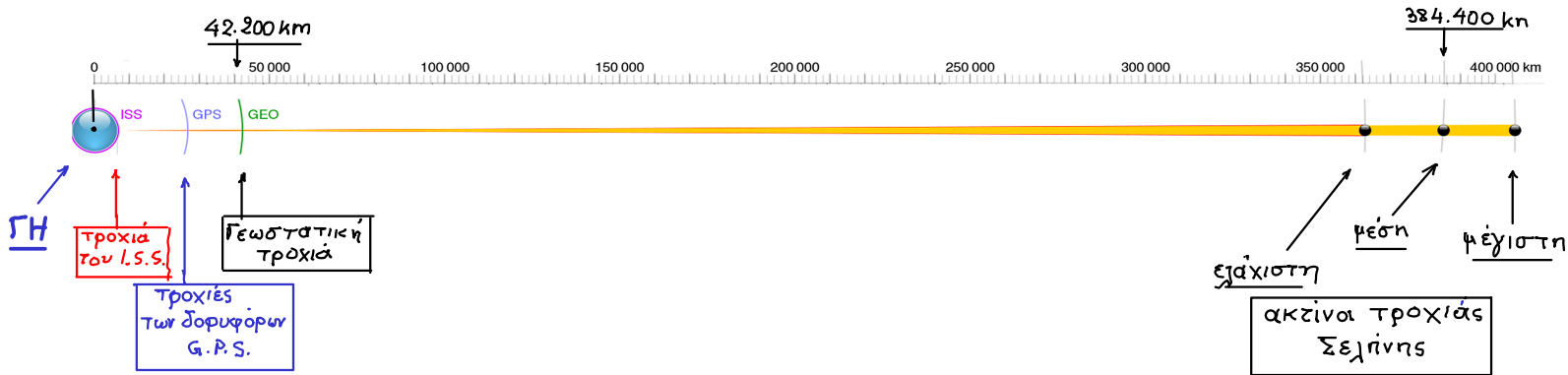
Το ύψος της γεωστατικής τροχιάς είναι $H_\Sigma = 35786 \text{ km}$ πάνω από τον Ισημερινό.



$$KI = R_E$$

$$ID = H_\Sigma$$

Σχετικές αποστάσεις των δορυφόρων της Γης



Στοιχεία Σελήνης

Μάζα Σελήνης: $M_{\Sigma} = 7,34 \cdot 10^{22} \text{ kg}$ ή $M_r = 81,33 \cdot M_{\Sigma}$

Ακτίνα Σελήνης: $R_{\Sigma} = 1737 \text{ km}$ ή $R_r = 3,67 R_{\Sigma}$

Μέση ακτίνα τροχιάς: $r_{\Sigma} = 384400 \text{ km}$ ή $r_{\Sigma} = 60,35 \cdot R_r$

Επιτρόχια (γραμμική) ταχύτητα: $v_{\Sigma} = 1,02 \frac{\text{km}}{\text{s}}$

Ένταση του Β.Π στην επιφάνεια: $g_{\Sigma} = 1,62 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$ ή $g_r = 6,06 \cdot g_{\Sigma}$

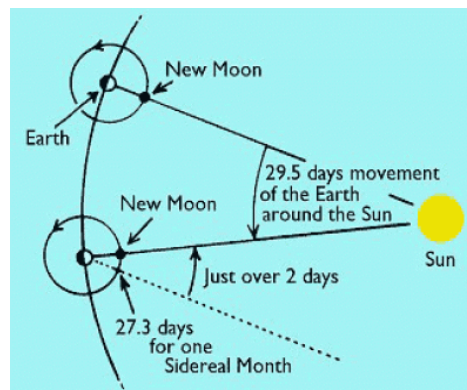
Ταχύτητα διαφυγής από το ΒΠΣ: $v_d = 2,38 \frac{\text{km}}{\text{s}}$

Περίοδος περιστροφής: $T_{\Sigma} = 27,3 \text{ ημέρες}$

Φαινόμενη (συνοδική) περίοδος:

Είναι ο χρόνος του σεληνιακού κύκλου, της επανάληψης δηλαδή όλων των φάσεων της Σελήνης, ή αλλιώς ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών «συνόδων» (ευθυγραμμισμών) με τον Ήλιο.

$T_{\text{syn}} = 29,5 \text{ ημέρες}$



«Μαθητικές» προσεγγίσεις

$$r_{\Sigma} \approx 60 \cdot R_r$$

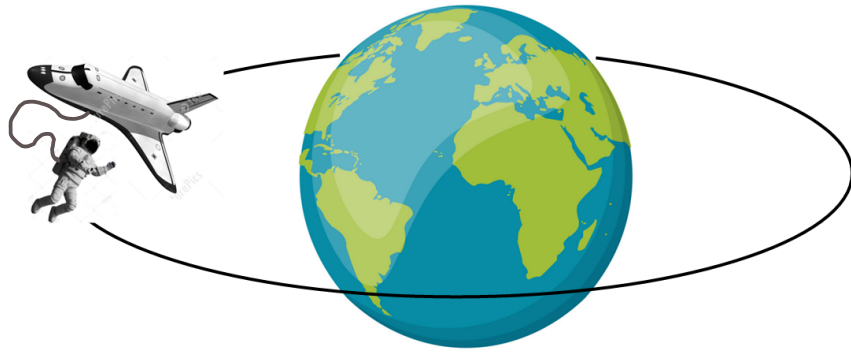
$$R_{\Sigma} \approx \frac{1}{4} \cdot R_r$$

$$M_{\Sigma} \approx 81 \cdot M_r$$

$$g_{\Sigma} \approx \frac{1}{6} \cdot g_r$$



Συνθήκες έλλειψης βαρύτητας



Σας είναι καθόλου γνώριμες οι πιο πάνω εικόνες;
 Αστροναύτες να αιωρούνται μέσα στον διαστημικό σταθμό;
 Ή στο κενό, έξω από ένα δορυφόρο, σαν να μην έχουν βάρος;
 Η αλήθεια είναι ότι έχουν βάρος, $\vec{B} = m\vec{g}$ όπου $\vec{g}$ η ένταση
 του $\mathcal{B}\Pi\Gamma$ στη θέση εκείνη.
 Μα τότε γιατί δεν πέφτουν «προς τα κάτω», προς τη Γη;
 Θα πρέπει να σκεφτούμε τι είδους κίνηση κάνουν τη στιγμή

που τους παρατηρούμε. Είναι ακίνητοι ως προς τη Γή;

Μα και ο διαστημικός σταθμός και οποιοσδήποτε δορυφόρος βρίσκονται σε τροχιά γύρω από τη Γή, με την επίδραση και μόνο της βαρυτικής έλξης και με επιτάχυνση $\vec{a} = \vec{g}$.

Την ίδια κίνηση κάνει και κάθε άνθρωπος ή αντικείμενο μέσα στον δορυφόρο (ή δίπλα σ' αυτόν).

Ας θεωρήσουμε ότι ο άνθρωπος μέσα στο δορυφόρο «πατάει» στο δάπεδο. Τότε δέχεται μια δύναμη στήριξης $\vec{N}$ (ή την τάση T_N ενός σκοινιού αν κρέμεται από αυτό):

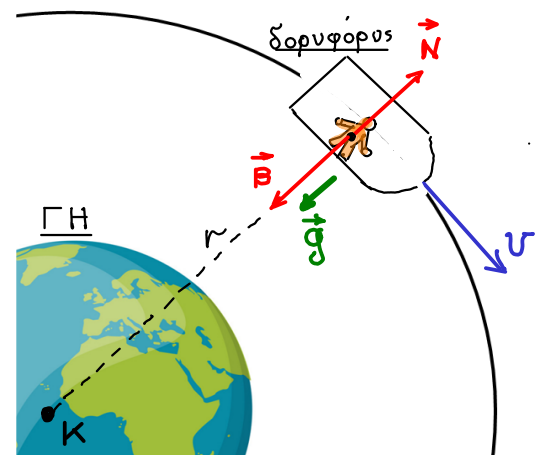
Λόγω ομαλής κυκλικής κίνησης:

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}_k \longrightarrow \vec{N} + \vec{B} = m \vec{a}_k \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \vec{N} + m \vec{g} = m \vec{a}_k$$

Όμως $\vec{a}_k = \vec{g}$, οπότε τελικά: $\boxed{\vec{N} = 0}$

Ο άνθρωπος δηλαδή δεν πατάει στο δάπεδο, αιωρείται μέσα στο δορυφόρο.



Έτσι, το βάρος δεν γίνεται αντιληπτό, αφού δεν ασκείται κάποια δύναμη που να το εξουδετερώνει.

Γι' αυτό γέμει ότι στον δορυφόρο επικρατούν συνθήκες Έλλειψης Βαρύτητας.