

Γ ΘΕΜΑΤΑ και ΟΙ ΛΥΣΕΙΣ ΤΟΥΣ

(Λ)Γ.3.1 Μια ελαστική μπάλα με μάζα $m=0,2\text{kg}$ πέφτει με οριζόντια ταχύτητα $v=10\text{m/s}$ σε κατακόρυφο τοίχο και ανακλάται με οριζόντια ταχύτητα ίσου μέτρου. Η επαφή της με τον τοίχο διαρκεί συνολικά $\Delta t=0,05\text{s}$.

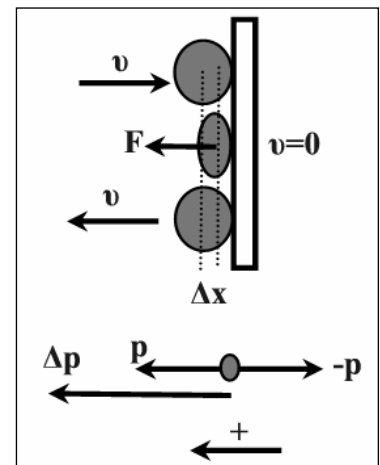
A. Να υπολογιστεί η μέση δύναμη που δέχτηκε η μπάλα από τον τοίχο και ο τοίχος από τη μπάλα.

Κατά τη διάρκεια της κρούσης η μπάλα συμπιέζεται και παραμορφώνεται, κάποια στιγμή μέγιστα οπότε και η ταχύτητά της μηδενίζεται. Μετά αποσυμπιέζεται, αποκαθιστά το σχήμα της και εγκαταλείπει τον τοίχο με την ίδια ταχύτητα. Υποθέτουμε ότι ο τοίχος είναι τελείως άκαμptos.

B. Να υπολογιστεί η μέγιστη μετατόπιση του κέντρου της μπάλας κατά τη συμπίεση.

Γ. Αν ο χρόνος επαφής μπάλας–τοίχου ήταν ο μισός, πόση θα ήταν η μετατόπιση του κέντρου της μπάλας κατά τη μέγιστη συμπίεση;

Δ. Να σχεδιαστούν τα διανύσματα των ορμών πριν και μετά την κρούση και το διάνυσμα της μεταβολής της ορμής.



Λύση

A. Ορίζουμε ως θετική τη φορά προς τα αριστερά. Η ορμή της μπάλα πριν την κρούση είναι $p_{\pi}=-p=-mv$ και μετά την κρούση $p_{\mu}=p=mv$

Η μεταβολή ορμής: $\Delta p = \vec{p}_{\mu} - \vec{p}_{\pi}$. Άρα: $\Delta p = mv - (-mv) = 2mv \rightarrow \Delta p = 4\text{kgm/s}$

Η δύναμη που δέχτηκε η μπάλα από τον τοίχο στη διάρκεια της κρούσης είναι μεταβλητή*. Εδώ υπολογίζουμε τη μέση τιμή της ως τη μέση τιμή του ρυθμού μεταβολής της ορμής. Η μέση δύναμη είναι μια υποθετική σταθερή δύναμη που προκαλεί στον ίδιο χρόνο Δt την ίδια μεταβολή ορμής με την πραγματική.

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2mv}{\Delta t} = \frac{4\text{kgm/s}}{0,05\text{s}} \rightarrow F = 80\text{N}.$$

Η αντίθετη δύναμη ασκείται από τη μπάλα στον τοίχο σύμφωνα με το νόμο δράσης αντίδρασης

B. Ο υπολογισμός της μετατόπισης του κέντρου μάζας της μπάλα κατά τη μέγιστη παραμόρφωση αυτής θα υπολογιστεί από το ΘΜΚΕ, μιας και η μέση δύναμη θεωρείται σταθερή. Η αρχική κινητική ενέργεια είναι $K_a = \frac{1}{2}mv^2$ και η τελική στη μέγιστη παραμόρφωση $K_{\tau}=0$. Δηλαδή η μπάλα κάποια στιγμή σταματάει στιγμιαία.

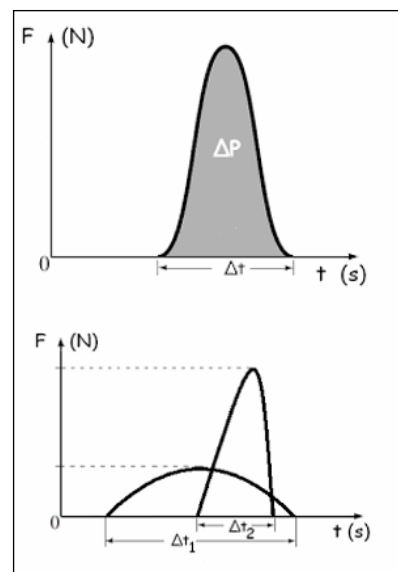
$$W_F = K_{\tau} - K_a \rightarrow -F\Delta x = -\frac{1}{2}mv^2 \rightarrow \Delta x = \frac{mv^2}{2F} \rightarrow \Delta x = 0,125\text{m}$$

Γ. Για το μισό χρόνο επαφής $\Delta t' = \Delta t/2$, η δύναμη θα είναι: $F' = \frac{2mv}{\Delta t'} = \frac{4mv}{\Delta t} = 2F$

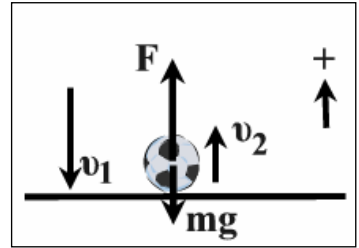
$$\text{Άρα: } \Delta x' = \frac{mv^2}{2F'} = \frac{mv^2}{4F} = \frac{\Delta x}{2} \rightarrow \Delta x' = 0,0625\text{m}$$

Δ. Τα διανύσματα $\vec{p}$, $-\vec{p}$ και $\Delta\vec{p}$ φαίνονται το σχήμα.

- Η δύναμη επαφής σε μια τέτοια κρούση μεταβάλλεται σε σχέση με το χρόνο με τον τρόπο που φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα. Για ίδιες μεταβολές ορμής Δp σε μεγαλύτερους χρόνους επαφής Δt αντιστοιχούν τα ίδια εμβαδά και ως εκ τούτου μικρότερες τιμές μέγιστης δύναμης. Οι συγκρούσεις με μαλακές επιφάνειες (βλέπε αερόσακος, αερόσολα, αφρολέξ κλπ) αυξάνουν το χρόνο κρούσης λόγω μεγάλης παραμόρφωσης και μειώνουν τις μέγιστες τιμές των δυνάμεων.



•(Λ)Γ.3.2 Μια μπάλα μάζας $m=1\text{kg}$ αφήνεται από ύψος $h_1=20\text{m}$ να πέσει ελεύθερα στο κενό. Όταν φτάνει στο έδαφος ανακλάται κατακόρυφα και ανεβαίνει σε ύψος $h_2=16,2\text{m}$. Κατά τη διάρκεια Δt της 1ης αναπήδησης με το έδαφος, ασκεί σε αυτό δύναμη σταθερού μέτρου $F=200\text{N}$. Να υπολογιστούν:



Α. Τα μέτρα των ταχυτήτων με τις οποίες η μπάλα φτάνει και φεύγει από το έδαφος.

Β. Ο συνολικός χρόνος από τη στιγμή που αφέθηκε μέχρι να επιστρέψει σε μέγιστο ύψος μετά την πρώτη αναπήδηση.

Γ. Το ποσοστό μεταβολής κινητικής ενέργειας της μπάλας λόγω της 1ης αναπήδησης.

Δ. Το ποσό θερμότητας που εκλύθηκε λόγω της 1ης κρούσης.

Ε. Αν στη δεύτερη κρούση η μπάλα χάνει το 19% της κινητικής ενέργειας που είχε μετά την πρώτη αναπήδηση να υπολογιστεί το νέο μέγιστο ύψος που ανεβαίνει μετά τη 2^η αναπήδηση.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

Λύση

Α. Από την ΑΔΜΕ στην πτώση: $mgh_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 \rightarrow v_1 = \sqrt{2gh_1} \rightarrow v_1 = 20\text{m/s}$

Από την ΑΔΜΕ στην άνοδο: $\frac{1}{2}mv_2^2 = mgh_2 \rightarrow v_2 = \sqrt{2gh_2} \rightarrow v_2 = 18\text{m/s}$

Β. Ορίζουμε ως θετική τη φορά προς τα πάνω:

Η μεταβολή ορμής: $\Delta p = p_2 - p_1$. Άρα: $\Delta p = mv_2 - (-mv_1) = m(v_2 + v_1) \rightarrow \Delta p = 38\text{kgm/s}$

Στην επαφή της με το έδαφος η μπάλα δέχεται το βάρος της mg και τη δύναμη F από το έδαφος

$$\Sigma F = \frac{\Delta p}{\Delta t} \rightarrow F - mg = \frac{\Delta p}{\Delta t} \rightarrow F = mg + \frac{\Delta p}{\Delta t} \rightarrow \frac{\Delta p}{\Delta t} = F - mg \rightarrow \Delta t = \frac{\Delta p}{F - mg} = \frac{38\text{kgm/s}}{190\text{kg}} \rightarrow \Delta t = 0,2\text{s}$$

Η πτώση διαρκεί t_1 : $v_1 = gt_1 \rightarrow t_1 = \frac{v_1}{g} \rightarrow t_1 = 2\text{s}$

Η άνοδος διαρκεί t_2 : $0 = v_2 - gt_2 \rightarrow t_2 = \frac{v_2}{g} \rightarrow t_2 = 1,8\text{s}$

Άρα ο συνολικός χρόνος: $t_{\text{ολ}} = t_1 + \Delta t + t_2 = 2\text{s} + 0,2\text{s} + 1,8\text{s} \rightarrow t_{\text{ολ}} = 4\text{s}$

Γ. Η κινητική ενέργεια K_1 μόλις πριν την πρώτη αναπήδηση και K_2 αμέσως μετά από αυτήν:

$$K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 = 200\text{J} \quad \text{και} \quad K_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 = 162\text{J}$$

$$\text{Το ποσοστό μεταβολής: } \pi\% = \frac{\Delta K}{K_1} \cdot 100\% = \frac{K_2 - K_1}{K_1} \cdot 100\% = \frac{-38\text{J}}{200} \cdot 100\% \rightarrow \pi\% = -19\%$$

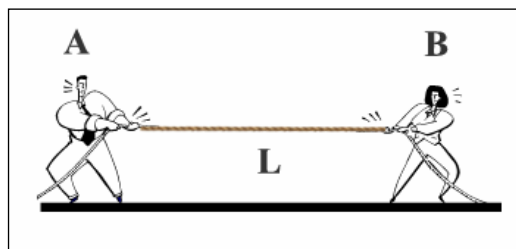
Δ. Η κινητική ενέργεια που έχασε η μπάλα μετατράπηκε σε θερμότητα: $Q = K_1 - K_2 \rightarrow Q = 38\text{J}$.

Ε. Μετά την πρώτη αναπήδηση η μπάλα επιστρέφει στο έδαφος με κινητική ενέργεια K_2 . Αφού στην δεύτερη αναπήδηση η μπάλα χάνει το 19% της κινητικής της ενέργειας ανακλάται με κινητική ενέργεια

$K_3 = 81\%K_2 \rightarrow K_3 = 0,81 \cdot 162\text{J} \rightarrow K_3 = 131,22\text{J}$. Από την ΑΔΜΕ μπορούμε να βρούμε το ύψος που θα ανέβει μετά

$$mgh = K_3 \rightarrow h = \frac{K_3}{mg} \rightarrow h = 13,122\text{m}$$

(Λ)Γ.3.3 Δύο μαθητές παγοδρόμοι Α και Β, με μάζες αντίστοιχα $m_1=40\text{kg}$ και $m_2=60\text{kg}$, κρατούν τις άκρες ενός σχοινιού αμελητέας μάζας. Οι μαθητές στέκονται αρχικά ακίνητοι πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο (παγοδρόμιο) απέχοντας μεταξύ τους $L=10\text{m}$. Κάποια στιγμή οι μαθητές αρχίζουν να μαζεύουν το σχοινί ασκώντας σταθερή δύναμη ο ένας στον άλλον, χωρίς να πέσει κανείς από τους δύο.



Α. Να βρείτε το λόγο των επιταχύνσεων με τις οποίες κινούνται.

Β. Να βρείτε το λόγο των κινητικών ενεργειών που έχουν ελάχιστα πριν τη στιγμή της συνάντησης.

Γ. Να βρείτε τη μετατόπιση που κάνει ο καθένας μέχρι να συναντηθούν.

Δ. Αν η δύναμη που ασκεί ο ένας είναι $F_1=30\text{N}$ να υπολογιστούν οι ταχύτητες των μαθητών τη στιγμή της συνάντησης.

Ε. Αν οι μαθητές τη στιγμή της σύγκρουσης αγκαλιαστούν και παραμείνουν αγκαλιασμένοι ποια θα είναι η κοινή τους ταχύτητα;

Λύση

Α. Οι παγοδρόμοι δέχονται στον οριζόντιο άξονα μόνο τη δύναμη του τεντωμένου νήματος.

Συνεπώς δέχονται αντίθετες δυνάμεις με μέτρα: $F_1=F_2=F \rightarrow m_1 a_1 = m_2 a_2 \rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1} \rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{3}{2}$

Β. Το σύστημα είναι απομονωμένο και η ορμή του διατηρείται:

$$p_{\text{αρχ}} = p_{\text{τελ}} \rightarrow m_1 v_1 - m_2 v_2 = 0 \rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{m_2}{m_1} \rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{\frac{1}{2} m_1 v_1^2}{\frac{1}{2} m_2 v_2^2} = \frac{m_2}{m_1} \rightarrow \frac{K_1}{K_2} = \frac{3}{2}$$

Γ. Από το ΘΜΚΕ: $F_1 x_1 = K_1 - 0$ (1) και $F_2 x_2 = K_2 - 0$ (2) με $F_1 = F_2$

$$(1):(2) \rightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{K_1}{K_2} = \frac{3}{2} \rightarrow x_1 = \frac{3x_2}{2} \quad (3)$$

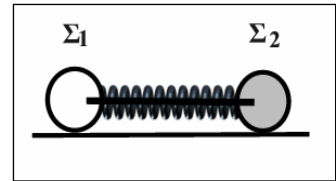
$$\text{Αλλά: } x_1 + x_2 = L \rightarrow \frac{3x_2}{2} + x_2 = L \rightarrow x_2 = \frac{2L}{5} \rightarrow x_2 = 4\text{m} \quad \text{και από (3)} \rightarrow x_1 = 6\text{m}$$

$$\text{Δ. Από το ΘΜΚΕ για τον Α: } F_1 x_1 = K_1 - 0 \rightarrow F_1 x_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2F_1 x_1}{m_1}} \rightarrow v_1 = 3\text{m/s}$$

$$\text{και } \frac{v_1}{v_2} = \frac{3}{2} \rightarrow v_2 = 2\text{m/s}$$

$$\text{Ε. Από τη διατήρηση της ορμής ισχύει } p_{\text{αρχ}} = p_{\text{τελ}} \rightarrow 0 = (m_1 + m_2)V \rightarrow V = 0$$

(Λ)Γ.3.4 Δύο σφαίρες μάζας $m_1=0.2\text{kg}$ και $m_2=1\text{kg}$, συγκρατούνται σε επαφή με τα άκρα ενός συσπειρωμένου αβαρούς ελατηρίου με τη βοήθεια ενός νήματος. Το σύστημα αρχικά είναι ακίνητο. Το ελατήριο έχει σταθερά $k=600\text{N/m}$ και είναι συσπειρωμένο κατά $x_0=0,2\text{m}$. Τη χρονική στιγμή $t=0$, το νήμα κόβεται, το ελατήριο αποσυσπειρώνεται και οι σφαίρες απομακρύνονται. Να υπολογιστούν:



- A.** Τα μέτρα των επιταχύνσεων των σωμάτων τη χρονική στιγμή $t_0=0$ και αφού κόπηκε το νήμα.
- B.** Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου πριν κοπεί το νήμα.
- Γ.** Τα μέτρα των ταχυτήτων των σφαιρών όταν μηδενιστεί η συσπίρωση του ελατηρίου.
- Δ.** Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής των σφαιρών όταν η συσπίρωση του ελατηρίου είναι $x_1=0,1\text{m}$

Λύση

A. Οι σφαίρες δέχονται από το ελατήριο δυνάμεις ίσου μέτρου αλλά αντίθετης φορά $F_1=F_2=kx$, όπου x η συσπίρωση του ελατηρίου. Μόλις κοπεί το νήμα οι δυνάμεις έχουν μέτρο $F_1=F_2=kx_0=600\text{N/m}\cdot 0,2\text{m} \rightarrow F_1=F_2=120\text{N}$

Άρα οι επιταχύνσεις θα είναι: $F_1=m_1a_1 \rightarrow a_1=F_1/m_1 \rightarrow a_1=600\text{m/s}^2$

$F_2=m_2a_2 \rightarrow a_2=F_2/m_2 \rightarrow a_2=120\text{m/s}^2$

B. Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου: $U_0=\frac{1}{2}kx_0^2 \rightarrow U_0=12\text{J}$

Γ. Από τη διατήρηση της ορμής οι σφαίρες εγκαταλείπουν το ελατήριο με ταχύτητες v_1 και v_2 των οποίων η σχέση είναι:

$$P_{\text{αρχ}}=P_{\text{τελ}} \rightarrow 0=m_1v_1-m_2v_2 \rightarrow v_2=0,2v_1$$

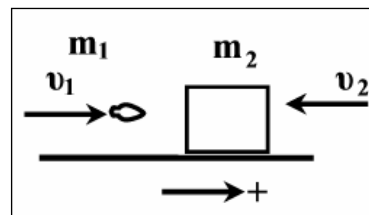
Από τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας: Όταν το ελατήριο επανέρχεται στο φυσικό του μήκος, το άθροισμα των κινητικών ενεργειών των σωμάτων ισούται με την αρχική δυναμική ενέργεια του ελατηρίου.

$$K_1+K_2=U \rightarrow \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2=U \rightarrow 0,2v_1^2+v_2^2=24 \rightarrow 0,2v_1^2+0,04v_1^2=24\text{J} \rightarrow 0,24v_1^2=24\text{J} \rightarrow v_1=10\text{m/s} \text{ και } v_2=2\text{m/s}$$

Δ. Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής της κάθε σφαίρας ισούται με τη συνισταμένη δύναμη που δέχεται κάθε στιγμή. Εδώ είναι η δύναμη του ελατηρίου που είναι ίση με $F=kx_1=60\text{N}$

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{dp_2}{dt} = F=kx_1=60\text{N}$$

(Λ)Γ.3.5 Βλήμα μάζας $m_1=0,2\text{kg}$ κινείται προς την θετική κατεύθυνση του οριζόντιου άξονα $x'Ox$ σφηνώνεται με ταχύτητα $v_1=200\text{m/s}$. Το βλήμα σφηνώνεται σ' ένα ξύλινο κύβο μάζας $m_2=3,8\text{kg}$ που κινείται αντίθετα πάνω στον ίδιο άξονα. Η ταχύτητα, V , του ενιαίου σώματος που προκύπτει έχει μέτρο $18,5\text{m/s}$ και η κατεύθυνση ίδια με την αρχική κατεύθυνση του κύβου. Το χρονικό διάστημα που διαρκεί η κρούση είναι $\Delta t=0,5\text{s}$.



A. Πόση είναι η αρχική ταχύτητα v_2 του κύβου;

B. Πόση δύναμη δέχτηκε το βλήμα κατά την κρούση;

Γ. Ποιο είναι το ποσοστό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του βλήματος;

Δ. Πόση θερμότητα εκλύθηκε λόγω της κρούσης και ποιο ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας του συστήματος έγινε θερμότητα;

Λύση

A. Θεωρώ ως θετική τη φορά προς τα δεξιά. Με βάση αυτή οι αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων που δίνονται είναι $v_1=200\text{m/s}$ και $V=-18,5\text{m/s}$

Η ΑΔΟ στην κρούση:

$$p_1+p_2=p_{\mu} \rightarrow m_1v_1+m_2v_2=(m_1+m_2)V \rightarrow v_2=\frac{(m_1+m_2)V-m_1v_1}{m_2} \rightarrow v_2=-30\text{m/s}.$$

Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι ο κύβος κινείται προς την αρνητική φορά

B. Η μεταβολή ορμής του βλήματος:

$$\Delta p_1=p_{\mu,1}-p_{\pi 1}=m_1V-m_1v_1=m_1(V-v_1)=0,2\text{kg}\cdot(-18,5\text{m/s}-200\text{m/s}) \rightarrow \Delta p_1=-43,70\text{kgm/s}$$

$$\text{Η δύναμη: } f_1=\frac{\Delta p_1}{\Delta t}=\frac{-43,70\text{kgm/s}}{0,5\text{s}} \rightarrow F_1=-87,4\text{N}$$

Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι η κατεύθυνση της δύναμης F_1 είναι προς τα αριστερά

* Η μεταβολή ορμής του κύβου:

$$\Delta p_2=p_{2\mu}-p_{2\pi}=m_2V-m_2v_2=m_2(V-v_2)=3,8\text{kg}(-18,5\text{m/s}-(-30\text{m/s}))=3,8\text{kg}\cdot 11,5\text{m/s} \rightarrow$$

$$\Delta p_2=43,70\text{kgm/s}$$

Προφανώς διότι η ορμή διατηρείται και θα πρέπει $\Delta p_1+\Delta p_2=0 \rightarrow \Delta p_2=-\Delta p_1$.

Η δύναμη που δέχεται ο κύβος είναι: $F_2=\frac{\Delta p_2}{\Delta t}=87,4\text{N}$. Δηλαδή η αντίδρασης της F_1 .

Γ. Η κινητική ενέργεια του βλήματος μεταβάλλεται κατά

$$\Delta K_1=K_{1,\mu}-K_{1,\pi}=\frac{1}{2}m_1V^2-\frac{1}{2}m_1v_1^2 \rightarrow \Delta K_1=-3965,775\text{J}$$

$$\text{Ποσοστό μεταβολής της: } \pi_1=\frac{\Delta K_1}{K_{1\pi}}100\% \rightarrow \pi_1\%=-99,14\%$$

Δ. Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος των δύο σωμάτων:

$$\Delta K=K_{\mu}-K_{\pi}=\frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2-(\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2)=-5025,5\text{J}$$

Η μεταβολή αυτή ισούται κατ' άπολυτη τιμή με τη θερμότητα που εκλύθηκε κατά την πλαστική κρούση:

$$Q=|\Delta K|=5025,5\text{ J}$$

Η κινητική ενέργεια πριν την κρούση είναι: $K_{\pi} = K_1 + K_2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \rightarrow K_{\pi} = 5.710J$

Το ποσοστό της αρχικής ενέργειας που έγινε θερμότητα είναι: $\pi\% = \frac{Q}{K_{\pi}}100\% = 88\%$

(Λ)Γ.3.6 Σφαίρα μάζας $m_1=4kg$ κινείται με σταθερή ταχύτητα $v_1=10m/s$ κατά τη θετική φορά του άξονα $x'Ox$ και συγκρούεται μετωπικά με άλλη σφαίρα μάζας $m_2=1kg$, που κινείται στην ίδια ευθεία με αντίθετη φορά και ταχύτητα μέτρου $v_2=30m/s$. Μετά την κρούση η σφαίρα (1) αντιστρέφει τη φορά της κίνησής της με ταχύτητα μέτρου $6m/s$. Να υπολογιστούν:

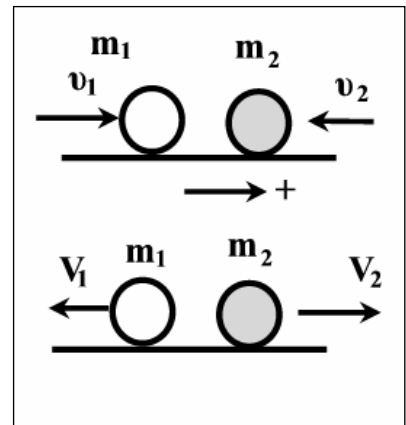
A. Η ταχύτητα της σφαίρας (2) μετά την κρούση.

B. Οι μεταβολές της ορμής των σφαιρών μετά την κρούση.

Γ. Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος και το είδος της κρούσης.

Δ. Το ποσοστό της κινητικής ενέργειας της μιας που μεταβιβάστηκε στην άλλη.

Ε. Η απόσταση που θα απέχουν $1s$ μετά την κρούση.



Λύση

A. Οι αλγβρικές τιμές των ταχυτήτων είναι $v_1=10m/s$, $v_2=-30m/s$, $V_1=-6m/s$. Από την ΑΔΟ θα υπολογιστεί η V_2 .

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1V_1 + m_2V_2 \rightarrow V_2 = \frac{40 - 30 + 24}{1} m/s \rightarrow V_2 = 34m/s$$

$$\mathbf{B.} \Delta p_1 = m_1V_1 - m_1v_1 = 4kg(-6m/s - 10m/s) \rightarrow \Delta p_1 = -64kgm/s$$

$$\Delta p_2 = m_2V_2 - m_2v_2 = 1kg(34m/s - (-30m/s)) \rightarrow \Delta p_2 = 64kgm/s$$

Γ. Οι κινητικές ενέργειες πριν και μετά την κρούση:

$$K_{\pi} = K_{1\pi} + K_{2\pi} = 200J + 450J \rightarrow K_{\pi} = 650J$$

$$K_{\mu} = K_{1\mu} + K_{2\mu} = 72J + 578J \rightarrow K_{\mu} = 650J$$

Άρα $\Delta K = K_{\mu} - K_{\pi} = 0$ συνεπώς η εν λόγω κρούση είναι **ελαστική**.

Δ. Η σφαίρα (1) είχε $K_{1\pi}=200J$ και μετά την κρούση $K_{1\mu}=72J$. Άρα έχασε $\Delta K_1=128J$ που προφανώς μεταβιβάστηκαν στη σφαίρα (2). Το ποσοστό της K_1 που μεταβιβάστηκε στη (2) είναι

$$\pi\% = \frac{\Delta K_1}{K_{1,\pi}}100\% = \frac{128J}{200J}100\% \rightarrow \pi\% = 64\%$$

Ε. Με αυτές τις ταχύτητες $|V_1|=6m/s$ και $|V_2|=34m/s$ οι σφαίρες διανύουν στο λείο επίπεδο με σταθερές ταχύτητες, αποστάσεις $x_1 = |V_1| \cdot t = 6m$ και $x_2 = |V_2| \cdot t = 34m$. Άρα η μεταξύ τους απόσταση μετά την κρούση είναι: $x = x_1 + x_2 = 40m$

•(Λ)Γ.3.7 Κύβος μάζας $M=4,8\text{kg}$ στηρίζεται σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης $\varphi=30^\circ$. Βλήμα μάζας $m=0,2\text{kg}$, κινούμενο οριζόντια με ταχύτητα $v=200\sqrt{3}\text{m/s}$, σφηνώνεται στον κύβο ακαριαία.

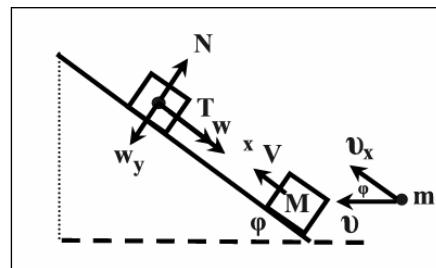
A. Πόση είναι η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση;

B. Πόσο θα μετατοπιστεί το συσσωμάτωμα που σχηματίζεται, αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ κύβου και κεκλιμένου επιπέδου είναι $\mu=\sqrt{3}/3$.

Γ. Πόσο χρόνο χρειάζεται για να σταματήσει για πρώτη φορά;

Δ. Θα ολισθήσει και πάλι το συσσωμάτωμα προς τα κάτω μετά τον πρώτο μηδενισμό της ταχύτητας;

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.



Λύση

A. Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα κινείται στον άξονα, x , του κεκλιμένου επιπέδου. Άρα γράφουμε την ΑΔΟ στον άξονα αυτόν. Για να το κάνουμε πρέπει να πάρουμε τη συνιστώσα της ταχύτητας του βλήματος στον άξονα αυτόν, που είναι η $v_x=v_0\sin\varphi=200\sqrt{3}\cdot(\sqrt{3}/2)=300\text{m/s}$.

$$mv_x=(M+m)V \rightarrow V=12\text{m/s}$$

B. Από το ΘΜΚΕ για ολίσθηση κατά s στο κεκλιμένο:

$$W_{mg}+W_T=K_{τελ}-K_{αρχ} \rightarrow -[(M+m)g\cdot\eta\mu\varphi]\cdot s - [\mu(M+m)g\sin\varphi]\cdot s = 0 - \frac{1}{2}(M+m)V^2 \rightarrow$$

$$s=7,2\text{m}$$

Γ. Η συνισταμένη δύναμη στον άξονα του κεκλιμένου έχει αλγεβρική τιμή~

$$\Sigma F_x = -mg\eta\mu\varphi - T = -(M+m)g\eta\mu\varphi - \mu(M+m)g\sin\varphi \rightarrow \Sigma F_x = -50\text{N}$$

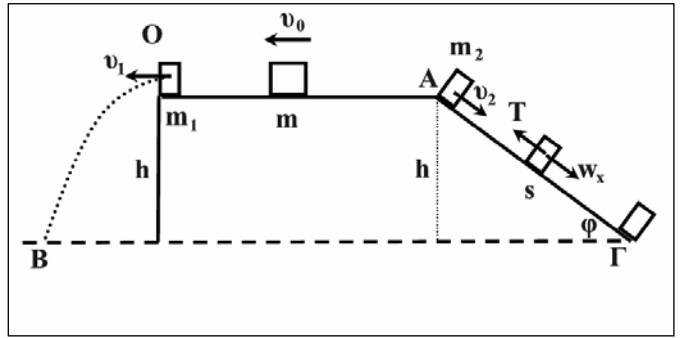
$$\Sigma F_x = \frac{\Delta p}{\Delta t} \rightarrow \Sigma F_x = \frac{0 - (M+m)V}{\Delta t} \rightarrow \Delta t = 1,2\text{s}$$

Δ. Για να κινηθεί προς τα κάτω, πρέπει η συνισταμένη δύναμη να είναι, $\Sigma F_x > 0$.

$$\Sigma F_x = (M+m)g\eta\mu\varphi - \mu(M+m)g\sin\varphi = 25\text{N} - 25\text{N} = 0 \rightarrow \Sigma F_x = 0$$

Με μηδενική συνισταμένη δεν θα ξεκινήσει, θα ισορροπεί.

(Λ)Γ.3.8 Σώμα, μάζας $m=10\text{kg}$, που κινείται ευθύγραμμα πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα μέτρου $v_0=4\text{m/s}$. Ξαφνικά διασπάται σε δύο τμήματα με μάζες $m_1=6\text{kg}$ και $m_2=4\text{kg}$. Το τμήμα μάζας m_1 κινείται με οριζόντια ταχύτητα μέτρου $v_1=10\text{m/s}$ στην ίδια κατεύθυνση με τη v_0 , ενώ το άλλο τμήμα κινείται αντίθετα. Το m_1 φτάνει στο σημείο Ο και από εκεί κάνει οριζόντια βολή μέχρι το έδαφος που βρίσκεται κατά $h=6,25\text{m}$ χαμηλότερα. Το m_2 συναντά στο σημείο Α ένα τραχύ κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης φ και αρχίζει να ολισθαίνει πάνω σ' αυτό με φορά προς τα κάτω. Να υπολογιστούν:



Α. Η ταχύτητα v_2 του τμήματος m_2 μετά τη διάσπαση.

Β. Το μέτρο της ταχύτητας του σώματος m_1 όταν φτάνει στο έδαφος.

Γ. Το μέτρο της ταχύτητας του σώματος μάζας m_2 , όταν φτάνει στο έδαφος και το χρόνο που χρειάζεται για να κατέβει το κεκλιμένο.

Δ. Ποιο ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας του m_2 έγινε θερμότητα λόγω τριβών;

Ο συντελεστής τριβής μεταξύ του σώματος και του κεκλιμένου επιπέδου είναι $\mu=3/4$ και η γωνία φ έχει $\eta\mu\varphi=0,6$ και $\sigma\upsilon\nu\varphi=0,8$ και το $g=10\text{m/s}^2$.

Λύση

Α. Από την ΑΔΟ στη διάσπαση με θετικά προς τα αριστερά:

$$m_1 v_0 = m_1 v_1 - m_2 v_2 \rightarrow v_2 = 5\text{m/s} \quad (1)$$

Β. Το m_1 φτάνει στο έδαφος με ταχύτητα μέτρου v_1' . Από την ΑΔΜΕ από το Ο έως το Β:

$$m_1 g h + \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 \rightarrow v_1' = 15\text{m/s}.$$

Γ. Στο κεκλιμένο επίπεδο το τμήμα m_2 διανύει την απόσταση $s=ΑΓ$ μς $\eta\mu\varphi=h/s \rightarrow s=h/\eta\mu\varphi$.

Η συνισταμένη δύναμη στον άξονα αυτού είναι

$$\Sigma F_{2x} = m_2 g \eta\mu\varphi - \mu m_2 g \sigma\upsilon\nu\varphi \cdot s = m_2 g \eta\mu\varphi - \mu \cdot m_2 g \sigma\upsilon\nu\varphi \rightarrow \Sigma F_{2x} = 24\text{N} - 24\text{N} \rightarrow \Sigma F_{2x} = 0$$

Άρα το m_2 κατεβαίνει το κεκλιμένο επίπεδο με μηδενική επιτάχυνση άρα σταθερή ταχύτητα και φτάνει στο Γ με $v_2' = v_2 = 5\text{m/s}$.

$$\text{Σε χρόνο: } s = v_2 t_2 \rightarrow t_2 = s/v_2 = h/v_2 \eta\mu\varphi \rightarrow t_2 = 2,083\text{s}$$

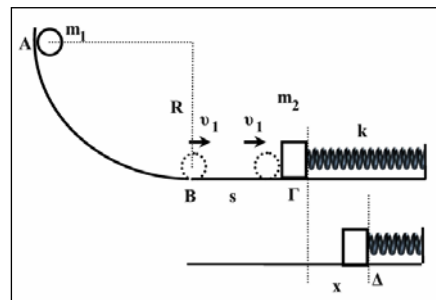
Δ. Η θερμότητα λόγω τριβών ισούται με την απόλυτη τιμή του έργου της τριβής και είναι:

$$Q = |W_T| = \mu \cdot m_2 g \sigma\upsilon\nu\varphi \cdot s = (\mu \cdot m_2 g \sigma\upsilon\nu\varphi) \cdot \frac{h}{\eta\mu\varphi} \rightarrow Q = 250\text{J}$$

$$E_{\text{αρχ},2} = U_{\text{αρχ},2} + K_{\text{αρχ},2} = m_2 g h + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = 250\text{J} + 50\text{J} = 300\text{J}$$

$$\text{Άρα: } \pi\% = \frac{Q}{E_{\text{αρχ},2}} 100\% = \frac{250}{300} 100\% \rightarrow \pi\% = 83,3\%$$

(Α)Γ.3.9 Θεωρούμε κατακόρυφο τεταρτοκύκλιο AB, ακτίνας $R=2\text{m}$ που εφάπτεται στο κάτω άκρο του B, με οριζόντιο δάπεδο. Σώμα μάζας $m_1=1\text{kg}$, αφήνεται να ολισθήσει κατά μήκος του τεταρτοκυκλίου από το άνω άκρο A. Το σώμα περνάει από το σημείο B με ταχύτητα $v_1=4\text{m/s}$ και συνεχίζει να κινείται χωρίς τριβές κατά μήκος της οριζόντιας εφαπτομένης του τεταρτοκυκλίου στο σημείο B. Αφού διανύσει διάστημα BΓ στο λείο οριζόντιο επίπεδο συγκρούεται μετωπικά με σώμα μάζας $m_2=5\text{kg}$, που είναι δεμένο στο άκρο ελατηρίου σταθεράς $k=100\text{N/m}$. Το m_2 μετά την κρούση κινείται στο οριζόντιο επίπεδο με τριβές και σταματάει αφού διανύσει διάστημα $\Gamma\Delta=x=0,2\text{m}$. Ο συντελεστής τριβής στο τμήμα $\Gamma\Delta$ είναι $\mu=0,05$. Να υπολογιστούν:



A. Η θερμότητα που παράχθηκε λόγω τριβής κατά την καθοδική κίνηση του σώματος στο τεταρτοκύκλιο.

B. Οι ταχύτητες των δύο σωμάτων μετά την κρούση και το είδος της κρούσης.

Γ. Το ποσοστό (%) της αρχικής μηχανικής ενέργειας του σώματος m_1 που έγινε θερμότητα λόγω τριβών κατά την ολίσθηση των σωμάτων στα τμήματα AB και $\Gamma\Delta$.

Δ. Το ποσοστό (%) της αρχικής μηχανικής ενέργειας του σώματος m_1 που έγινε θερμότητα λόγω κρούσης.

Ως στάθμη μηδενικής δυναμικής ενέργειας να θεωρηθεί το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το B. Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

Λύση

A. ΘΜΚΕ για το σώμα m_1 από το A στο B: $W_B + W_{T1} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 \rightarrow W_{T1} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 - m_1gR \rightarrow W_{T1} = -12\text{J}$. Άρα η θερμότητα που εκλύθηκε είναι **12J**.

B. ΘΜΚΕ για το m_2 από Γ σε Δ : $W_{T2} + W_{ελ} = 0 - \frac{1}{2}m_2V_2^2$ (1)

Τα έργα των δυνάμεων στη διαδρομή $\Gamma\Delta$ είναι:

$$W_{T2} = -T_2x = -\mu N_2x = -\mu m_2gx = -0,5\text{J} \text{ και } W_{ελ} = U_{ελ,α} - U_{ελ,τ} = 0 - \frac{1}{2}kx^2 = -2\text{J}$$

Από (1) $\rightarrow V_2 = 1\text{m/s}$

Από την ΑΔΟ στην κρούση: $m_1v_1 = m_1V_1 + m_2V_2 \rightarrow V_1 = \frac{m_1v_1 - m_2V_2}{m_1} \rightarrow V_1 = -1\text{m/s}$.

Η κινητική ενέργεια του συστήματος πριν την κρούση είναι $K_{\pi\rho} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 = 8\text{J}$

Μετά την κρούση είναι: $K_{\mu\epsilon\tau} = \frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2 \rightarrow K_{\mu\epsilon\tau} = 3\text{J}$

Άρα $\Delta K = -3\text{J}$, δηλαδή, $K_{\mu\epsilon\tau} < K_{\pi\rho}$, οπότε η κρούση είναι **ανελαστική**.

Γ. Τριβές υπάρχουν στα τμήματα AB και $\Gamma\Delta$. Συνολικά το έργο της τριβής είναι:

$$W_{T1} + W_{T2} = -12\text{J} - 0,5\text{J} = -12,5\text{J}. \text{ Άρα η θερμότητα λόγω τριβών είναι } Q = 12,5\text{J}$$

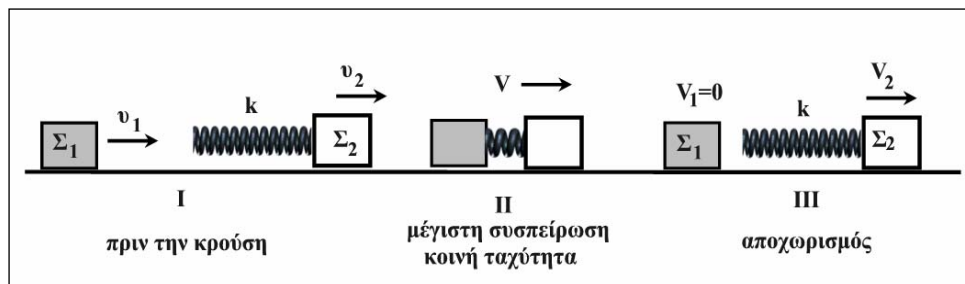
$$\pi_1\% = \frac{Q}{E_A} 100\% = \frac{Q}{m_1gh} 100\% = \frac{12,5}{20} 100\% \rightarrow \pi_1\% = 62,5\%$$

Δ. Η θερμότητα που εκλύθηκε λόγω της ανελαστικής κρούσης ισούται με την απόλυτη τιμή της μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συστήματος κατά την κρούση.

$$\pi_1\% = \frac{|\Delta K|}{E_A} 100\% = \frac{|\Delta K|}{m_1gh} 100\% = \frac{3}{20} 100\% \rightarrow \pi_2\% = 15\%$$

(Α)Γ.3.10 Σώμα Σ_1 μάζας $m_1=3\text{kg}$ ολισθαίνει χωρίς τριβές πάνω σε οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα $v_1=6\text{m/s}$. Μπροστά απ' αυτό, άλλο σώμα Σ_2 μάζας $m_2=9\text{kg}$ ολισθαίνει στην ίδια κατεύθυνση και με ταχύτητα $v_2=2\text{m/s}$. Το σώμα Σ_2 φέρει πίσω του στερεωμένο οριζόντιο ελατήριο σταθεράς $k=100\text{N/m}$, αμελητέας μάζας. Κατά τη σύγκρουση που ακολουθεί το ελατήριο παραμορφώνεται τα σώματα πλησιάζουν και στην συνέχεια απομακρύνονται, μέχρι να αποκτήσει και πάλι το ελατήριο το φυσικό του μήκος. Τότε το σώμα Σ_1 σταματάει. Να υπολογιστούν:

- Η ταχύτητα των σωμάτων τη στιγμή που το ελατήριο έχει μέγιστη συσπίρωση.
- Η μέγιστη δυναμική ενέργεια που απορροφά το ελατήριο.
- Η μέγιστη συσπίρωση του ελατηρίου.
- Η ταχύτητα του σώματος Σ_2 όταν το ελατήριο επανέρχεται στο φυσικό του μήκος.
- Οι ρυθμοί μεταβολής της ταχύτητας των σωμάτων στη θέση της μέγιστης συσπίρωσης.



Λύση

A. Το m_1 προλαβαίνει το m_2 αφού έχει μεγαλύτερη ταχύτητα και συγκρούεται με το ελατήριο. Το ελατήριο αρχίζει να συσπειρώνεται. Η δύναμη του ελατηρίου, $F=kx$, επιβραδύνει το m_1 και επιταχύνει το m_2 . Για όσο διάστημα το m_1 έχει μεγαλύτερη ακόμα ταχύτητα από το m_2 τα σώματα πλησιάζουν και το ελατήριο συσπειρώνεται. Κάποια στιγμή τα δύο σώματα θα αποκτήσουν κοινή ταχύτητα V . Τότε το ελατήριο θα έχει τη μέγιστη συσπίρωση, x_m . Αμέσως μετά η ταχύτητα του m_1 θα είναι μικρότερη αυτής του m_2 , το m_1 θα μένει πίσω, το m_2 θα φεύγει μπροστά και τα σώματα θα απομακρύνονται. Τότε όμως η συσπίρωση του ελατηρίου θα μειώνεται μέχρι να μηδενιστεί και τα σώματα να αποχωριστούν με ταχύτητες V_1, V_2 .

Γράφω ΑΔΟ από την κατάσταση (I) στη (II): $m_1v_1+m_2v_2=m_1V+m_2V \rightarrow V=3\text{m/s}$.

B. Γράφω ΑΔΜΕ από την (I) στη (II): $\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2=\frac{1}{2}m_1V^2+\frac{1}{2}m_2V^2+U_{ελ} \rightarrow U_{ελ}=18\text{J}$

Γ. Από τον τύπο της δυναμικής ενέργειας ελατηρίου: $U_{ελ} = \frac{1}{2}kx_m^2 \rightarrow x_m=0,6\text{m}$

Δ. Γράφω ΑΔΟ και ΑΔΜΕ για το σύστημα μεταξύ των καταστάσεων (I) και (III) με $V_1=0$

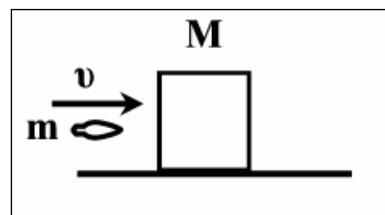
$$m_1v_1+m_2v_2= m_1V_1+m_2V_2 \rightarrow V_2= 4\text{m/s}$$

Ε. Η μόνη οριζόντια δύναμη που δέχονται τα σώματα είναι αυτή του ελατηρίου $F=kx$. Στη θέση $x=x_{\max}=0,6\text{m}$ η δύναμη αυτή είναι $F_{\max}=60\text{N}$. Με το 2^ο νόμο Newton έχουμε:

$$a_1=F_{\max}/m_1=-60\text{N}/3\text{kg} \rightarrow a_1=-3\text{m/s}^2$$

$$a_2=F_{\max}/m_2=60\text{N}/9\text{kg} \rightarrow a_2=20/3\text{m/s}^2$$

(Α)Γ.3.11 Ξύλινος κύβος μάζας $M=1,8\text{kg}$ ηρεμεί αρχικά πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Βλήμα μάζας $m=0,2\text{kg}$ κινείται οριζόντια και σφηνώνεται σ' αυτόν με ταχύτητα μέτρου $v=20\text{m/s}$. Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα ολισθαίνει στο επίπεδο με το οποίο παρουσιάζει τριβές με συντελεστή τριβής $\mu=0,2$. Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.



Α. Πόση είναι η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

Β. Πόσο χρόνο χρειάζεται το συσσωμάτωμα για να σταματήσει και πόσο διάστημα θα έχει διανύσει μέχρι τότε;

Γ. Ποιο ποσοστό της κινητικής ενέργειας του βλήματος έγινε θερμότητα λόγω κρούσης

Δ. Ποιο ποσοστό της κινητικής ενέργειας του βλήματος έγινε θερμότητα λόγω τριβών με το επίπεδο;

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$

Λύση

Α. Από την ΑΔΟ στην πλαστική κρούση: $mv=(M+m)V \rightarrow V=2\text{m/s}$

Β. Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα ολισθαίνει δεχόμενο τριβή μέτρου: $T=\mu N=\mu(M+m)g=4\text{N}$

Συνεπώς επιβραδύνεται με επιβράδυνση a και σταματάει

$$\Sigma F_x=(M+m)a \rightarrow -T=(M+m)a \rightarrow a=-2\text{m/s}^2$$

$$V_{\text{τελ}}=V-|a|t \rightarrow 0=V-|a|t \rightarrow t=\frac{V}{|a|} \rightarrow t=1\text{s}$$

$$\Delta x=Vt - \frac{1}{2}|a|t^2=1\text{m} \quad \text{η} \quad \Delta x=\frac{V^2}{2|a|} \rightarrow \Delta x=1\text{m}$$

Γ. Η κινητική ενέργεια πριν την κρούση είναι του βλήματος $K_{\text{προ}}=\frac{1}{2}mv^2=40\text{J}$

Μετά την κρούση η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι $K_{\text{μετα}}=\frac{1}{2}(M+m)V^2=4\text{J}$

Η θερμότητα λόγω κρούσης είναι η απόλυτη τιμή της μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συστήματος λόγω κρούσης:

$$Q=|\Delta K|=|4\text{J}-40\text{J}| \rightarrow Q=36\text{J}$$

$$\pi\%=\frac{Q}{K_{\text{προ}}}\cdot 100\%=\frac{36}{40}\cdot 100\% \rightarrow \pi\%=90\%$$

Δ. Η θερμότητα λόγω τριβών είναι η απόλυτη τιμή του έργου της τριβής με το δάπεδο μετά την κρούση

$$|W_T|=T\cdot \Delta x=4\text{N}\cdot 1\text{m}=4\text{J}$$

$$\pi'\%=\frac{|W_T|}{K_{\pi}}\cdot 100\%=\frac{4}{40}\cdot 100\% \rightarrow \pi'\%=10\%$$

Δ ΘΕΜΑΤΑ και ΟΙ ΛΥΣΕΙΣ ΤΟΥΣ

Λ.3.1 Πυροβόλο μάζας $M=100\text{kg}$ φέρει βλήμα μάζας $m=5\text{kg}$ και ισορροπεί σε οριζόντιο επίπεδο. Ξαφνικά βάλλει το βλήμα οριζόντια στο κενό με ταχύτητα $v_0=40\text{m/s}$.

Α. Πόση θα είναι η ταχύτητα του πυροβόλου μετά την εκτόξευση του βλήματος.

Β. Το πυροβόλο οπισθοδρομεί σε τραχύ έδαφος. Πόσο διάστημα διανύσει μέχρι να σταματήσει, αν ο συντελεστής τριβής μεταξύ αυτού και το εδάφους είναι $\mu=0,2$.

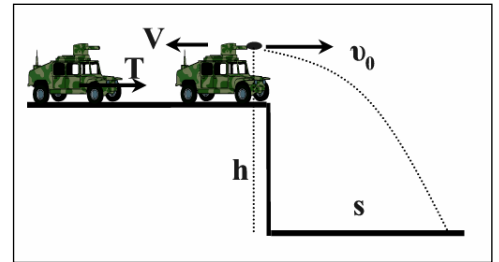
Γ. Το βλήμα κάνει οριζόντια βολή και προσγειώνεται σε οριζόντια απόσταση $s=200\text{m}$ από το σημείο βολής του. Πόσο χρόνο χρειάζεται για να προσγειωθεί;

Δ. Από ποιο ύψος, h , έγινε η βολή του βλήματος;

Ε. Πόσο είναι το μέτρο της ταχύτητας με την οποία το βλήμα προσγειώνεται;

Στ. Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής της ορμής και της μηχανικής, κινητικής και δυναμικής ενέργειας του βλήματος τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος;

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.



Λύση

Α. Από την ΑΔΟ: $0=mv_0-MV \rightarrow V=2\text{m/s}$

Β. Από το ΘΜΚΕ για τη μετατόπιση κατά Δx του πυροβόλου. Η μόνη δύναμη που κάνει έργο πάν σε αυτό είναι η τριβή ολίσθησης.

$$W_T = K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρ}} \rightarrow -\mu N \Delta x = 0 - \frac{1}{2} M V^2 \rightarrow \Delta x = \frac{V^2}{2\mu g} \rightarrow \Delta x = 1\text{m}$$

Γ. Από την οριζόντια βολή: $s = v_0 t \rightarrow t = \frac{s}{v_0} \rightarrow t = \frac{200\text{m}}{40\text{m/s}} \rightarrow t = 5\text{s}$

Δ. $h = \frac{1}{2} g t^2 \rightarrow h = 125\text{m}$

Ε. Η ταχύτητα προσγείωσης: $v = \sqrt{v_0^2 + (gt)^2} \rightarrow v = 10\sqrt{41}\text{m/s}$

Στ. Ρυθμός μεταβολής ορμής: $\frac{dp}{dt} = \Sigma F = mg = 50\text{kgm/s}^2 \rightarrow \frac{dp}{dt} = 50\text{N}$

Ρυθμός μεταβολής μηχανικής ενέργειας: $E = \text{σταθερό} \rightarrow \frac{dE}{dt} = 0$

Η μηχανική ενέργεια διατηρείται επειδή δέχεται μόνο τη συντηρητική δύναμη του βάρους

Ρυθμός μεταβολής κιν. ενέργειας: $\frac{dK}{dt} = \frac{d\Sigma W}{dt} = \Sigma F \cdot v = \Sigma F_y \cdot v_y = mg v_y = mg g t = mg^2 t \rightarrow \frac{dK}{dt} = 2500\text{J/s}$

Ρυθμός μεταβολής δυν. ενέργειας: $E = K + U \rightarrow \frac{dE}{dt} = \frac{dU}{dt} + \frac{dK}{dt} \rightarrow \frac{dU}{dt} = -\frac{dK}{dt} \rightarrow \frac{dU}{dt} = -2500\text{J/s}$

Δ.3.2 Το σώμα μάζας $M=4\text{kg}$ κρέμεται από νήμα μήκους $L=1\text{m}$. Εκτρέπουμε το νήμα έτσι ώστε το σώμα να ανέβει κατά $h=0,45\text{m}$ πάνω από την αρχική του θέση και το αφήνουμε ελεύθερο

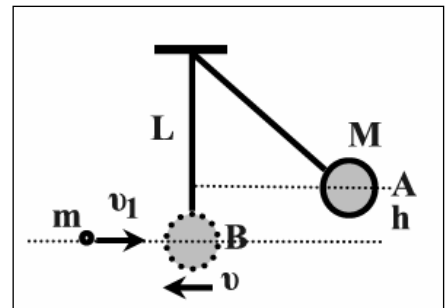
A. Πόση είναι η δύναμη που δέχεται το σώμα από το νήμα τη στιγμή που το νήμα γίνεται κατακόρυφο.

B. Βλήμα μάζας $m=0,5\text{kg}$ κινείται οριζόντια με ταχύτητα, v_1 και σφηνώνεται στο σώμα τη στιγμή που το νήμα γίνεται κατακόρυφο. Πόση πρέπει να είναι η ταχύτητα, v_1 ώστε το συσσωμάτωμα μετά την κρούση να μείνει ακίνητο;

Γ. Πόση θα γίνει η τάση του νήματος μετά την κρούση;

Δ. Πόση ταχύτητα v_2 θα έπρεπε να έχει το ίδιο βλήμα ώστε μετά την κρούση με το M υπό τις ίδιες συνθήκες, το συσσωμάτωμα να προκαλούσε μέγιστη εκτροπή του νήματος από την κατακόρυφη θέση, κατά γωνία, θ , με $\sin\theta=0,8$. Πόση θα ήταν η τάση του νήματος στη θέση μέγιστης εκτροπής;

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$



Λύση

A. Γράφω ΑΔΜΕ από το A έως το B για να βρώ την ταχύτητα v του σώματος στο B

$$E_A=E_B \rightarrow Mgh = \frac{1}{2}Mv^2 \rightarrow v = \sqrt{2gh} \rightarrow v = 3\text{m/s}$$

Η τάση του νήματος στο B είναι F_B και υπολογίζεται από την κεντρομόλο:

$$\Sigma F_B = M \frac{v^2}{L} \rightarrow F_B - Mg = M \frac{v^2}{L} \rightarrow F_B = 76\text{N}$$

B. Γράφω την ΑΔΟ στην πλαστική κρούση: $mv_1 - Mv = (M+m) \cdot 0 \rightarrow v_1 = \frac{Mv}{m} \rightarrow v_1 = 24\text{m/s}$

Γ. Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα μένει ακίνητο. Άρα:

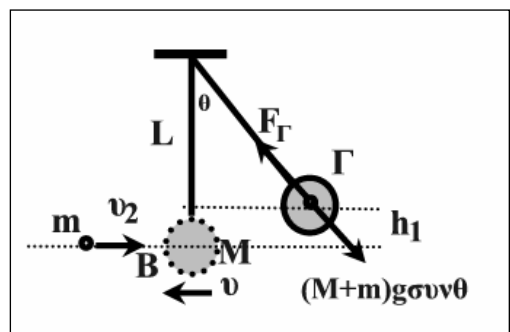
$$\Sigma F_B = 0 \rightarrow F_B' - (m+M)g = 0 \rightarrow F_B' = 45\text{N}$$

Δ. Για να προκαλέσει στο νήμα εκτροπή θ με $\sin\theta=0,8$ θα πρέπει το $M+m$ να ανέβει σε ύψος h_1 πάνω από την αρχική του θέση.

$$h_1 = L - L\sin\theta = 1\text{m} - 0,8\text{m} \rightarrow h_1 = 0,2\text{m}$$

Γράφω ΑΔΜΕ Από το B έως το Γ για να βρω το h_1

$$E_A = E_\Gamma \rightarrow \frac{1}{2}(M+m)V^2 = (M+m)gh_1 \rightarrow V = \sqrt{2gh_1} \rightarrow V = 2\text{m/s}$$

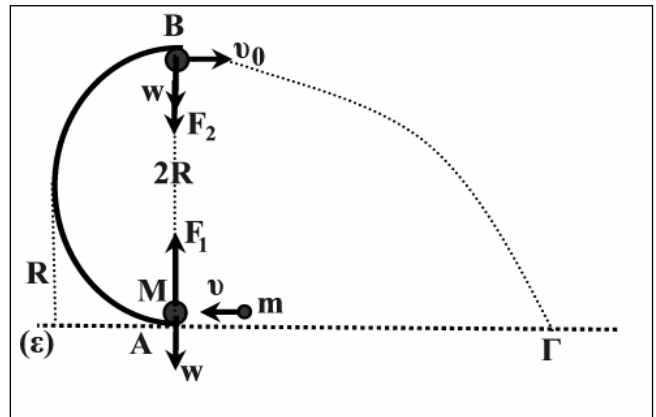


Από την ΑΔΟ: $mv_2 - Mv = (M+m)V \rightarrow v_2 = \frac{Mv + (M+m)V}{m} \rightarrow v_2 = 24\text{m/s}$

Στη θέση μέγιστης εκτροπής, Γ , η ταχύτητα είναι $V_\Gamma = 0$, άρα και η κεντρομόλος $\Sigma F_r = F_k = 0$

$$\Sigma F_r = 0 \rightarrow F_r - (M+m)g \cdot \sin\theta = 0 \rightarrow F_r = (M+m)g \sin\theta \rightarrow F_r = 36\text{N}$$

Λ.3.3 Το σώμα μάζας $M=1\text{kg}$ ηρεμεί αρχικά στο άκρο Α ενός κατακόρυφου σταθερού και λείου ημικυκλικού ελασματος ακτίνας $R=0,4\text{m}$. Βλήμα μάζας $m=1\text{kg}$ κινούμενο με οριζόντια ταχύτητα $v=20\text{m/s}$ σφηνώνεται στο Μ. Μετά την πλαστική κρούση το συσσωμάτωμα διαγράφει ημικύκλιο φτάνει στο Β και από εκεί βάλλεται οριζόντια και πέφτει στο σημείο Γ του οριζόντιου επιπέδου (ε).



Α. Πόση είναι η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση;

Β. Πόσο είναι το μέτρο της δύναμης που ασκεί το έλασμα στο συσσωμάτωμα στο σημείο Α αμέσως μετά την κρούση;

Γ. Πόσο είναι το μέτρο της δύναμης που ασκεί το έλασμα στο συσσωμάτωμα στο σημείο Β.

Δ. Ποια είναι η τιμή του ρυθμού μεταβολής της ορμής στο σημείο Β;

Ε. Πόση είναι η οριζόντια απόσταση ΑΓ.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$ και $\sqrt{84}=9,2$

Λύση

Α. Από την ΑΔΟ στην κρούση: $mv=(M+m)V \rightarrow V=10\text{m/s}$

Β. $\Sigma F_A=(M+m)\frac{V^2}{R} \rightarrow F_1-(M+m)g=(M+m)\frac{V^2}{R} \rightarrow F_1=(M+m)g+(M+m)\frac{V^2}{R} \rightarrow F_1=520\text{N}$

Γ. Θα βρώ πρώτα την ταχύτητα v_0 του $M+m$ στο Β με την ΑΔΜΕ

$E_A=E_B \rightarrow \frac{1}{2}(m+M)V^2=(M+m)g \cdot 2R + \frac{1}{2}(m+M)v_0^2 \rightarrow V^2=4gR+v_0^2 \rightarrow v_0=\sqrt{V^2-4gR} \rightarrow v_0=\sqrt{84}\text{m/s} \rightarrow$

$\rightarrow v_0=9,2\text{m/s}$

$\Sigma F_B=(M+m)\frac{v_0^2}{R} \rightarrow F_2+(M+m)g=(M+m)\frac{v_0^2}{R} \rightarrow F_2=400\text{N}$

Δ. Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής ισούται με τη συνισταμένη δύναμη που είναι:

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \Sigma F_B = F_2 + (M+m)g = 400\text{N} + 20\text{N} \rightarrow \frac{\Delta p}{\Delta t} = 420\text{N}$$

Ε. Το σώμα μάζας $(M+m)$ κάνει από το Β οριζόντια βολή με αρχική ταχύτητα $v_0=\sqrt{84}\text{m/s}$ από ύψος $2R=10,8\text{m}$

$$y=2R = \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow t=\sqrt{0,16}\text{s} \rightarrow t=0,4\text{s}$$

Το βεληνεκές $ΑΓ=x=v_0t=9,2\text{m/s} \cdot 0,4 \rightarrow (ΑΓ)=3,68\text{m}$

Δ.3.4 Νήμα μήκους $L=2\text{m}$ κρέμεται από ακλόνητο σημείο και φέρει στο κάτω άκρο του ορθογώνιο πρίσμα που ισορροπεί. Λόγω εσωτερικού εκρηκτικού μηχανισμού το πρίσμα σπάει σε δύο τμήματα. Το ένα με μάζα $m_1=6\text{kg}$ που εκτοξεύεται οριζόντια προς τα αριστερά και πέφτει στο έδαφος σε απόσταση $s=6\text{m}$. Το άλλο μάζας $m_2=3\text{kg}$ μένει συνδεδεμένο στο νήμα. Το πρίσμα απέχει από το έδαφος απόσταση $H=1,8\text{m}$. Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$

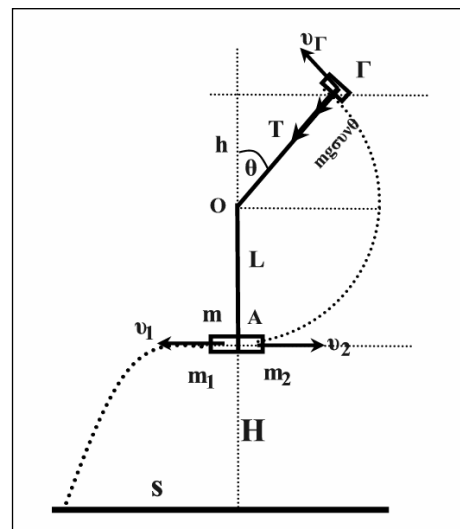
A. Να βρεθεί η ταχύτητα του m_1 αμέσως μετά τη διάσπαση.

B. Να βρεθεί η ταχύτητα και η κεντρομόλος επιτάχυνση του m_2 αμέσως μετά τη διάσπαση.

Γ. Να βρεθεί το συνθ της γωνία θ που θα σχηματίζει το νήμα με την κατακόρυφο σε κείνη τη θέση, Γ, που η ταχύτητα του m_2 θα έχει μέτρο $v_2=18\text{m/s}$.

Δ. Να βρεθεί η τάση του νήματος, T , στη θέση Γ.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.



Λύση

A. Από τα στοιχεία της οριζόντιας βολής του m_1 : $H = \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow t = \sqrt{0,36}\text{s} \rightarrow t = 0,6\text{s}$

Από το δεδομένο βεληνεκές: $s = v_1 t \rightarrow v_1 = \frac{s}{t} \rightarrow \mathbf{v_1 = 10\text{m/s}}$.

B. Από την ΑΔΟ για τη διάσπαση του πρίσματος: $p_{\text{αρχ}} = p_{\text{τελ}} \rightarrow 0 = m_1 v_1 - m_2 v_2 \rightarrow v_2 = \frac{m_1 v_1}{m_2} \rightarrow$

$\mathbf{v_2 = 20\text{m/s}}$ Κεντρομόλος επιτάχυνση: $a_2 = \frac{v_2^2}{L} \rightarrow \mathbf{a_2 = 200\text{m/s}^2}$

Γ. Από την ΑΔΜΕ για το m_2 από το Α έως το Γ υπολογίζω το ύψος, h , που ανεβαίνει το m_2 πάνω από το κέντρο Ο.

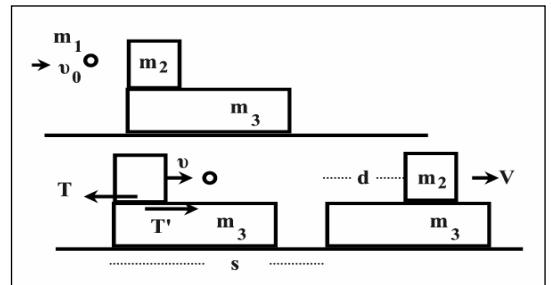
$$E_A = E_\Gamma \rightarrow \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = m_2 g(h+L) + \frac{1}{2}m_2 v_\Gamma^2 \rightarrow h+L = \frac{v_2^2 - v_\Gamma^2}{2g} = 3,8\text{m} \rightarrow h = 1,8\text{m}$$

Άρα $\text{συν}\theta = h/L = 1,8/2 \rightarrow \mathbf{\text{συν}\theta = 0,9}$

Δ. Σχεδιάζω τη συνιστώσα του βάρους $m_2 g \text{συν}\theta$ στη διεύθυνση του νήματος στη θέση Γ και την τάση T α του νήματος και από την κεντρομόλο δύναμη υπολογίζω την T ..

$$\Sigma F_R = m_2 \frac{v_B^2}{L} \rightarrow T + m_2 g \text{συν}\theta = m_2 \frac{v_B^2}{L} \rightarrow \mathbf{T = 459\text{N}}$$

Λ.3.5 Σώμα Α μάζας $M=2\text{kg}$ ηρεμεί πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο και πάνω του φέρει άλλο σώμα Β μάζας $m_2=2\text{kg}$ που αρχικά είναι ακίνητο. Μεταξύ των δύο σωμάτων υπάρχει τριβή με συντελεστή τριβής μ . Βλήμα μάζας $m_1=0,1\text{kg}$ έρχεται με οριζόντια ταχύτητα $v_0=80\text{m/s}$ και διαπερνάει το σώμα m_2 σε αμελητέο χρόνο, ενώ όταν βγαίνει από αυτό έχει χάσει τη μισή του ταχύτητα. Μετά την κρούση το σώμα Β ολισθαίνει πάνω στο Α κατά $d=0,5\text{m}$, μέχρι τα σώματα Α και Β να αποκτήσουν κοινή ταχύτητα. Να υπολογιστούν:



Α. Η κοινή ταχύτητα που θα αποκτήσουν.

Β. Η μετατόπιση s του σώματος Α ως προς το έδαφος μέχρι να τα σώματα Α και Β να αποκτήσουν κοινή ταχύτητα,

Γ. Ο συντελεστής τριβής, μ , μεταξύ των δύο σωμάτων.

Δ. Η θερμότητα που μεταφέρεται στο περιβάλλον λόγω κρούσης και ολίσθησης.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

Λύση

Α. Στην κρούση των m_1, m_2 ισχύει η ΑΔΟ : $m_1 v_0 = m_2 v + m_1 \frac{v_0}{2} \rightarrow v = 2\text{m/s}$

Μετά την κρούση το σώμα m_2 σέρνεται πάνω στο Μ. Λόγω της μεταξύ τους τριβής ολίσθησης παρασέρνει και το σώμα Μ και κινούνται το ένα ως προς το άλλο για κάποιο διάστημα μέχρι να αποκτήσουν κοινή ταχύτητα V . Στη συνέχεια κινούνται σαν ένα σώμα μάζας $M+m_2$ με την ταχύτητα V . Ισχύει και εδώ η διατήρηση της ορμής, αφού το σύστημα είναι μονωμένο:

$$m_2 v + 0 = (m_2 + M)V \rightarrow V = 1\text{m/s}$$

Β. Η τριβή T επιβραδύνει το m_2 και η αντίδρασή της T' επιταχύνει το Μ. Ισχύει $T = T' = \mu N = \mu m_2 g$. Μέχρι τα σώματα να αποκτήσουν κοινή ταχύτητα μετατοπίζονται. Το Μ μετατοπίζεται κατά s ενώ το m_2 κατά d πάνω στο Μ. Για ένα ακίνητο παρατηρητή το m_2 μετατοπίζεται κατά $s+d$ όπως φαίνεται και στο σχήμα. Γράφω το ΘΜΚΕ για κάθε σώμα χωριστά.

$$\text{Για το } m_2 : \Sigma W = \Delta K \rightarrow -T(s+d) = \frac{m_2 V^2}{2} - \frac{m_2 v^2}{2} \rightarrow -\mu m_2 g(s+d) = \frac{m_2 V^2}{2} - \frac{m_2 v^2}{2} \quad (1)$$

$$\text{Για το Μ: } \Sigma W = \Delta K \rightarrow T's = \frac{MV^2}{2} \rightarrow \mu m_2 g s = \frac{MV^2}{2} \quad (2)$$

$$\frac{(1)}{(2)} \rightarrow -\frac{s+d}{s} = \frac{m_2(V^2 - v^2)}{MV^2} \rightarrow \frac{s+d}{s} = 3 \rightarrow s = 0,25\text{m}$$

$$\text{Γ. Από τη (2)} \rightarrow \mu = \frac{MV^2}{2m_2 g s} \rightarrow \mu = 0,2$$

Δ. Για να βρω τη συνολική θερμότητα μετράω την αρχική και τελική κινητική ενέργεια του συστήματος και τις αφαιρώ. Η αρχική ενέργεια είναι του βλήματος και η τελική των $M+m_2$ και του βλήματος m_1 που βγήκε από το m_2 με ταχύτητα $v_0/2$.

$$K_{\text{αρχ}} = \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = 320\text{J}$$

$$K_{\text{τελ}} = \frac{1}{2} (m_2 + M) V^2 + \frac{1}{2} m_1 (v_0/2)^2 = 82\text{J}$$

$$Q = |K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}}| \rightarrow Q = 238\text{J}$$

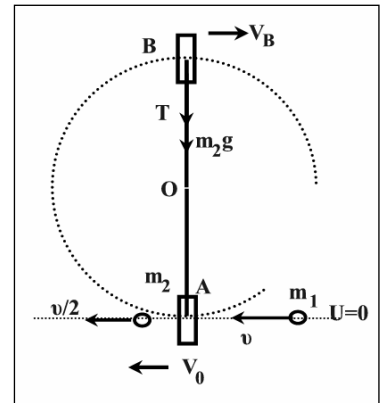
Δ.3.6 Στόχος μάζας $m_2=4\text{kg}$ κρέμεται από ακλόνητο σημείο, με τη βοήθεια αβαρούς νήματος μήκους $L=0\text{m}$. Βλήμα μάζας $m_1=1\text{kg}$ βάλλεται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου u διαπερνάει ακαριαία το στόχο και βγαίνει με οριζόντια ταχύτητα μέτρου $0,5u$.

A. Να υπολογιστεί η ελάχιστη τιμή της ταχύτητας u του βλήματος ώστε μετά την κρούση ο στόχος να διαγράψει κατακόρυφο κύκλο ακτίνας L , δηλαδή να κάνει «ανακύκλωση».

B. Να υπολογιστεί η δύναμη που ασκεί το νήμα στο στόχο, στην κατακόρυφη θέση, αμέσως μετά την κρούση.

Γ. Αν η κρούση είναι πλαστική και το συσσωμάτωμα διαγράφει μέγιστη γωνία $\theta+90^\circ=120^\circ$ πόση πρέπει να είναι η ελάχιστη ταχύτητα του βλήματος m_1 πριν την κρούση για αν γίνει αυτό;

Δίνεται το $g=10\text{m/s}^2$.



Λύση

A. Στην ανελαστική κρούση ισχύει η ΑΔΟ:

$$m_1 u = m_1 \frac{u}{2} + m_2 V_0 \rightarrow u = 8V_0 \quad (1)$$

Για να φτάσει όμως το σώμα m_2 στο σημείο B με το νήμα τεντωμένο ($T > 0$) θα πρέπει στο B να έχει κάποια ταχύτητα, $V_B \neq 0$. Η περιοχή τιμών της ταχύτητας αυτής υπολογίζεται από την κεντρομόλο δύναμη:

$$\Sigma F_B = \frac{m_2 V_B^2}{L} \rightarrow T + m_2 g = \frac{m_2 V_B^2}{L} \rightarrow T = \frac{m_2 V_B^2}{L} - m_2 g \quad \begin{matrix} T \geq 0 \\ \clubsuit \end{matrix} V_B \geq \sqrt{Lg} \rightarrow V_B \geq \sqrt{10}\text{m/s} \rightarrow V_{B,\epsilon\lambda} = \sqrt{10}\text{m/s} \quad (2)$$

Από τη ΑΔΜΕ για το m_2 από το σημείο A στο B μετά την κρούση, βρίσκουμε την ελάχιστη τιμή της ταχύτητας V_0 :

$$E_A = E_B \rightarrow \frac{1}{2} m_2 V_0^2 = \frac{1}{2} m_2 V_B^2 + m_2 g \cdot 2L \rightarrow V_0 = \sqrt{V_B^2 + 4gL} \\ \rightarrow V_{0,\epsilon\lambda} = \sqrt{V_{B,\epsilon\lambda}^2 + 4gL} \rightarrow V_{0,\epsilon\lambda} = \sqrt{50}\text{m/s} \quad (3)$$

$$\text{Από (1) (3)} \rightarrow v_{\epsilon\lambda} = 8\sqrt{50}\text{m/s}$$

$$\text{B. } \Sigma F_A = \frac{m_2 V_0^2}{L} \rightarrow T_A - m_2 g = \frac{m_2 V_0^2}{L} \rightarrow T_A = m_2 g + \frac{m_2 V_0^2}{L} \rightarrow \\ T_A = 240\text{N}$$

Γ. Στην πλαστική κρούση ισχύει η ΑΔΟ:

$m_1 u = (m_1 + m_2) V_1 \rightarrow u = 5V_1$ (4) Στο σημείο Γ:

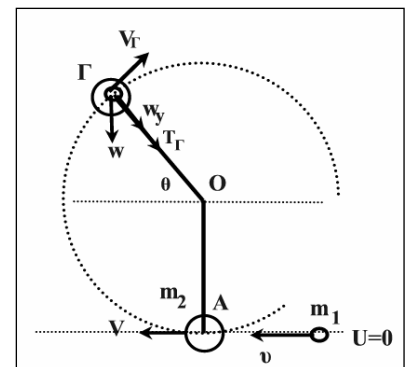
$$\Sigma F_\Gamma = \frac{(m_1 + m_2) V_\Gamma^2}{L} \rightarrow (m_1 + m_2) g \eta \mu \theta + T_\Gamma = \frac{(m_1 + m_2) V_\Gamma^2}{L} \rightarrow T_\Gamma = \frac{(m_1 + m_2) V_\Gamma^2}{L} - (m_1 + m_2) g \eta \mu \theta .$$

Για να είναι το νήμα τεντωμένο θα πρέπει $T_\Gamma \geq 0$ και άρα $V_\Gamma \geq \sqrt{L g \eta \mu \theta} \rightarrow V_\Gamma \geq \sqrt{5}\text{m/s}$ (5)

Από τη ΑΔΜΕ για το $M = (m_1 + m_2)$ από το A στο Γ μετά την κρούση, βρίσκουμε την ελάχιστη τιμή της ταχύτητας V_1 με τη βοήθεια και της (5):

$$E_A = E_\Gamma \rightarrow \frac{1}{2} M V_1^2 = \frac{1}{2} M V_\Gamma^2 + M g \cdot (L + L \eta \mu \theta) \rightarrow V_1 = \sqrt{V_\Gamma^2 + 3gL} \rightarrow V_{1,\epsilon\lambda} = \sqrt{V_{\Gamma,\epsilon\lambda}^2 + 4gL} \rightarrow V_{1,\epsilon\lambda} = \sqrt{35}\text{m/s}$$

$$\text{Από (4)} \rightarrow v_{\epsilon\lambda} = 5\sqrt{35}\text{m/s}$$



Α.3.7 Κομμάτι ξύλου μάζας $M=4\text{kg}$ κρέμεται από ακλόνητο σημείο με τη βοήθεια λεπτής, άκαμπτης και αβαρούς ράβδου, μήκους $L=0,4\text{m}$. Βλήμα μάζας $m=1\text{kg}$ συγκρούεται με το ξύλο με ταχύτητα, v , που σχηματίζει γωνία $\varphi=60^\circ$ με την οριζόντια διεύθυνση, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η κρούση είναι πλαστική και θεωρείται ακαριαία.

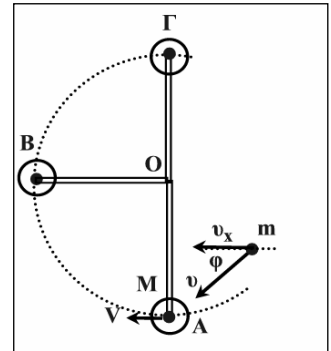
Να υπολογιστούν:

A. Η ταχύτητα, v , του βλήματος έτσι ώστε το συσσωμάτωμα να διαγράψει μέγιστη γωνία 90° μετά την κρούση.

B. Το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του βλήματος που έγινε θερμότητα, λόγω της πλαστικής κρούσης

Γ. Η νέα ελάχιστη ταχύτητα, $v'_{\min}$, του βλήματος, ώστε το συσσωμάτωμα μετά την κρούση να κάνει ανακύκλωση, αν η κρούση γίνεται και πάλι με τις ίδιες συνθήκες.

Δίνεται το $g=10\text{m/s}^2$.



Λύση

A. Η κρούση είναι πλάγια και πλαστική. Η ορμή διατηρείται μόνο στον οριζόντιο άξονα xx' που δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις και συνεχίζεται η κίνηση του συσσωματώματος. Αναλύω την ταχύτητα v και παίρνω την οριζόντια συνιστώσα $v_x=v\cdot\sin\varphi=0,5v$:

$$mv_x=(M+m)V \rightarrow V=\frac{mv\sin\varphi}{M+m} \rightarrow V=\frac{mv}{2(M+m)} \rightarrow v=2\frac{M+m}{m}V \quad (1)$$

Στο σημείο B η ελάχιστη ταχύτητα είναι $V_B=0$.

$$E_A=E_B \rightarrow \frac{1}{2}(M+m)V^2=(M+m)gL \rightarrow V_{\min}=\sqrt{2gL} \quad (2)$$

$$\text{Από (1)(2)} \rightarrow v_{\min}=\frac{M+m}{m}\sqrt{8gL} \rightarrow v_{\min}=20\sqrt{2} \text{ m/s}$$

B. Οι κινητικές ενέργειες πριν και μετά την κρούση:

$$K_{\pi}=\frac{1}{2}mv_{\min}^2=400\text{J} \quad \text{και} \quad K_{\mu}=\frac{1}{2}(M+m)V_{\min}^2=20\text{J}$$

$$\text{Η θερμική απώλεια: } Q=|\Delta K|=|K_{\mu}-K_{\pi}|=400\text{J}-20\text{J}=380\text{J}$$

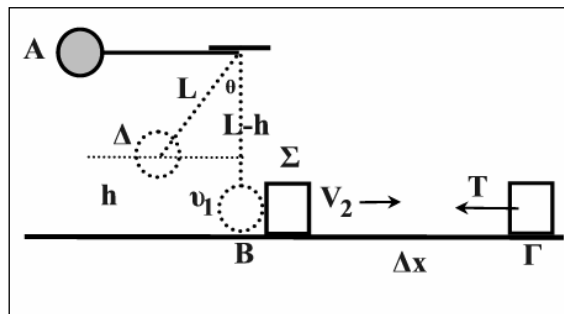
$$\text{Το ποσοστό: } \pi\%=\frac{|\Delta K|}{K_{\pi}}100\%=\frac{Q}{K_{\pi}}100\% \rightarrow \pi\%=95\%$$

Γ. Με άκαμπτη αβαρή ράβδο το $(M+m)$ μπορεί να φτάσει στο Γ με ελάχιστη ταχύτητα μηδέν διότι η ράβδος δεν τσαλακώνει. Άρα $V_{\Gamma\min}=0$. Γράφουμε και πάλι ΑΔΜΕ αλλά από το Α στο Γ μετά την κρούση για να βρούμε την νέα ελάχιστη απαιτούμενη ταχύτητα $V'_{\min}$ του συσσωματώματος.

$$E'_A=E'_\Gamma \rightarrow \frac{1}{2}(M+m)V'^2_{\min}=(M+m)g2L \rightarrow V'_{\min}=2\sqrt{gL} \rightarrow V'_{\min}=4\text{m/s} \quad (3)$$

$$(1)(3) \rightarrow v'_{\min}=2\frac{M+m}{m}V'_{\min} \rightarrow v'_{\min}=40\text{m/s}$$

Δ.3.8 Χαλύβδινη σφαίρα, σ , μάζας $m=1\text{kg}$ κρέμεται από ακλόνητο σημείο με τη βοήθεια αβαρούς ράβδου μήκους $L=0,8\text{m}$. Το σύστημα φέρεται σε οριζόντια θέση και αφήνεται ελεύθερο, χωρίς ταχύτητα να διαγράψει κυκλική τροχιά. Στο κατώτερο σημείο της τροχιάς της συγκρούεται κεντρικά με ακίνητο κύβο, Σ , μάζας $M=2,5\text{kg}$. Μετά την κρούση ο κύβος ολισθαίνει σε οριζόντιο επίπεδο και μετατοπίζεται κατά $\Delta x=2\text{m}$ μέχρι να σταματήσει. Μεταξύ κύβου και επιπέδου ο συντελεστής τριβής είναι $\mu=0,1$.



Α. Πόσο είναι ο ρυθμός μεταβολής της ορμής της σφαίρας στη θέση Α;

Β. Πόση είναι η ταχύτητα του σώματος Σ αμέσως μετά την κρούση και σε πόσο χρόνο σταματάει;

Γ. Πόση είναι η ταχύτητα της σφαίρας αμέσως μετά την κρούση;

Δ. Ποιο είναι το είδος της κρούσης που έγινε;

Ε. Πόση μέγιστη γωνία, ϕ , διαγράφει η αβαρής ράβδος μετά την κρούση;

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

Λύση

Α. Στη θέση Α η σφαίρα είναι ακίνητη και η κεντρομόλος άρα και η τάση του νήματος είναι μηδενική. Άρα η μόνη δύναμη που δέχεται είναι το βάρος της:

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = mg = 10\text{N}$$

Β. Γράφω ΘΜΚΕ για το σώμα Σ . $W_T = \Delta K \rightarrow -\mu Mg \Delta x = -\frac{1}{2}MV_2^2 \rightarrow V_2 = 2\text{m/s}$

Το σώμα ολισθαίνει υπό την επίδραση της τριβής $T = \mu N = \mu Mg = 2,5\text{N}$.

$$\Sigma F_x = \frac{\Delta p}{\Delta t} \rightarrow -T = \frac{0 - MV_2}{\Delta t} \rightarrow \Delta t = \frac{MV_2}{T} \rightarrow \Delta t = 2\text{s}$$

Γ. Η σφαίρα κατεβαίνει και φτάσει στην κατώτερη θέση με ταχύτητα v_1 , λίγο πριν την κρούση. Από την ΑΔΜΕ από το Α στο Β

$$E_A = E_B \rightarrow mgL = \frac{1}{2}mv_1^2 \rightarrow v_1 = \sqrt{2gL} \rightarrow v_1 = 4\text{m/s}$$

Μετά την κρούση η ταχύτητα της σφαίρας είναι V_1 .

$$\text{Από την ΑΔΟ για την κρούση έχουμε: } mv_1 = MV_2 + mV_1 \rightarrow V_1 = -1\text{m/s.}$$

Δ. Το είδος της κρούσης θα προσδιοριστεί από το αν διατηρείται η όχι η κινητική ενέργεια του συστήματος κατά την κρούση.

$$K_\pi = \frac{1}{2}mv_1^2 = 8\text{J}$$

$$K_\mu = \frac{1}{2}mV_1^2 + \frac{1}{2}MV_2^2 = 5,5\text{J}$$

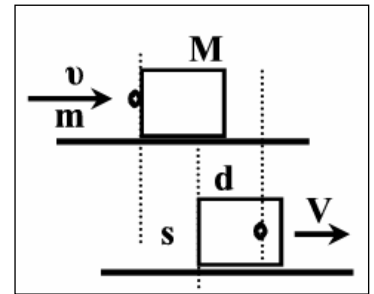
$$\Delta K = K_\mu - K_\pi = -2,5\text{J}. \text{ Άρα η κρούση είναι ανελαστική.}$$

Ε. Μετά την κρούση η σφαίρα ανεβαίνει κατά h πάνω από τη θέση Β και το νήμα σχηματίζει γωνία θ με την κατακόρυφο.

$$\text{Από την ΑΔΜΕ για τη σφαίρα μετά την κρούση: } \frac{1}{2}mV_1^2 = mgh \rightarrow h = \frac{V_1^2}{2g} \rightarrow h = 0,05\text{m}$$

$$\cos\theta = \frac{L-h}{L} = \frac{0,8-0,05}{0,8} \rightarrow \cos\theta = 0,9375$$

Δ.3.9 Βλήμα μάζας $m=0,1\text{kg}$ συγκρούεται μετωπικά με ξύλινο πρίσμα μάζας $M=4,9\text{kg}$ που αρχικά ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο και δημιουργείται συσσωμάτωμα. Κατά τη διάρκεια της κρούσης, το βλήμα εισχωρεί μέσα στο πρίσμα κατά $d=1\text{m}$. Η δύναμη που ασκείται μεταξύ βλήματος και πρίσματος θεωρείται σταθερή. Να υπολογιστούν:



A. Η ταχύτητα του συσσωματώματος μετά την κρούση.

B. Η θερμότητα που εκλύθηκε λόγω κρούσης.

Γ. Η δύναμη που ασκήθηκε μεταξύ των σωμάτων.

Δ. Η μεταβολή της ορμής του κάθε σώματος.

Ε. Η μετατόπιση του πρίσματος κατά τη διάρκεια της κρούσης.

Στ. Το χρονικό διάστημα που χρειάστηκε το βλήμα για να εισχωρήσει μέσα στο πρίσμα.

Λύση

A. Γράφουμε την ΑΔΟ στην κρούση: $mv=(M+m)V \rightarrow V=\frac{mv}{M+m} \rightarrow V=2\text{m/s}$

B. Η θερμότητα ισούται με την απόλυτη τιμή της μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συστήματος κατά την κρούση:

$$Q=|\Delta K|=|\frac{1}{2}(M+m)V^2 - \frac{1}{2}mv^2| \rightarrow Q=490\text{J}$$

Γ. Η δύναμη που ασκείται μεταξύ βλήματος και πρίσματος κάνει έργο $W=-Fd$, όπου d η εισχώρηση το βλήματος στο πρίσμα. Το έργο αυτό ισούται με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος, $\Delta K=-490\text{J}$.

$$-F \cdot d = \Delta K \rightarrow F = -\frac{-490\text{J}}{1\text{m}} \rightarrow F=490\text{N}$$

Ας το αναλύσουμε αυτό λίγο περισσότερο:

Αν το βλήμα ασκεί δύναμη F στο πρίσμα για μετατόπιση κατά s , το πρίσμα ασκεί την αντίδραση $-F$ στο βλήμα για μετατόπιση $d+s$ ως προς ακίνητο παρατηρητή. Αν γράψουμε τα ΘΜΚΕ για τα δύο σώματα θάχουμε

$$\text{Για το πρίσμα: } F \cdot s = \frac{1}{2}MV^2 \quad (1)$$

$$\text{Για το βλήμα: } -F(s+d) = \frac{1}{2}mV^2 - \frac{1}{2}mv^2 \quad (2)$$

$$\text{Από (1)+(2)} \rightarrow -F \cdot d = \frac{1}{2}(M+m)V^2 - \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow -F \cdot d = \Delta K$$

$$\text{A. Για το βλήμα} \quad \Delta p = mV - mv \rightarrow \Delta p = -9,8 \text{ kgm/s}$$

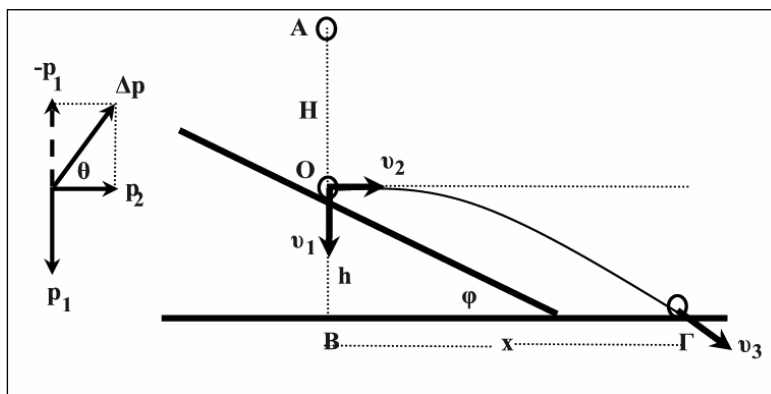
$$\text{Για το πρίσμα} \quad \Delta p' = MV \rightarrow \Delta p' = 9,8 \text{ kgm/s}$$

$$\text{E. Από το ΘΜΚΕ για το πρίσμα δηλ. τη σχέση (1)} \rightarrow F \cdot s = \frac{1}{2}MV^2 \rightarrow s = \frac{MV^2}{2F} \rightarrow s=0,02\text{m}$$

Στ. Η δύναμη F προκαλεί στο πρίσμα μεταβολή ορμής κατά $\Delta p'$ σε χρόνο Δt

$$F = \frac{\Delta p'}{\Delta t} \rightarrow \Delta t = \frac{\Delta p'}{F} \rightarrow \Delta t=0,02\text{s}$$

Δ.3.10 Σημείο Α βρίσκεται σε ύψος $H=3,2\text{m}$ πάνω από σημείο Ο λείου κεκλιμένου επιπέδου. Το Ο απέχει από το οριζόντιο έδαφος κατακόρυφη απόσταση $h=0,8\text{m}$. Από το Α αφήνουμε μια μπάλα μάζας $m=0,5\text{kg}$ να πέσει ελεύθερα και να συγκρουστεί με το κεκλιμένο. Μετά την κρούση η μπάλα αποκτά οριζόντια ταχύτητα $v_2=6\text{m/s}$ και στη συνέχεια βάζεται οριζόντια και προσγειώνεται στο σημείο Γ του εδάφους. Να υπολογιστούν.



Να υπολογιστούν.

Α. Η ταχύτητα v_1 με την οποία η μπάλα φτάνει στο Ο.

Β. Το μέτρο και την κατεύθυνση της μεταβολής της ορμής της μπάλας λόγω κρούσης με το κεκλιμένο.

Γ. Το ρυθμό μεταβολής της μπάλας λίγο πριν και λίγο μετά την κρούση με το κεκλιμένο.

Δ. Την ταχύτητα με την οποία η μπάλα φτάνει στο οριζόντιο έδαφος.

Ε. Αν η κρούση με το κεκλιμένο διαρκεί $\Delta t=0,2\text{s}$ να υπολογιστεί ο χρόνος που χρειάζεται για να πάει η μπάλα από το Α έως το Γ.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

Λύση

Α. Από την ΑΔΜΕ για τη μπάλα από Α στο Ο: $mgH = \frac{1}{2}mv_1^2 \rightarrow v_1 = \sqrt{2gH} \rightarrow v_1 = 8\text{m/s}$

Β. Οι ορμές της μπάλα πριν και μετά την κρούση σχηματίζουν γωνία 90° και έχουν μέτρα $p_1 = mv_1 = 4\text{kgm/s}$ και $p_2 = mv_2 = 3\text{kgm/s}$. Η μεταβολή της ορμής είναι:

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \vec{p}_2 + (-\vec{p}_1)$$

Το μέτρο μεταβολής της ορμής είναι: $|\Delta p| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2} = \sqrt{25}\text{kgm/s} \rightarrow |\Delta p| = 5\text{kgm/s}$

Η κατεύθυνση της μεταβολής ορμής είναι: $\epsilon\phi\theta = \frac{|p_1|}{|p_2|} \rightarrow \epsilon\phi\theta = \frac{4}{3}$

Γ. Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής ενός σώματος ισούται με τη συνισταμένη δύναμη που δέχεται. Λίγο πριν και λίγο μετά την κρούση η μπάλα δέχεται μόνο τη δύναμη του βάρους της άρα

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = mg = 5\text{N}.$$

Δ. Η μπάλα κάνει οριζόντια βολή με αρχική ταχύτητα $v_2=6\text{m/s}$ και προσγειώνεται με ταχύτητα v_3 στο σημείο Γ. Ο χρόνος πτήσης είναι t_2 : $h = \frac{1}{2}gt_2^2 \rightarrow t_2 = 0,4\text{s}$

Άρα: $v_3 = \sqrt{v_2^2 + (gt_2)^2} \rightarrow v_3 = \sqrt{52}\text{m/s}$ με διεύθυνση που σχηματίζει γωνία z με το οριζόντιο έδαφος και είναι: $\epsilon\phi z = \frac{v_{3y}}{v_{3x}} = \frac{gt_2}{v_2} \rightarrow \epsilon\phi z = \frac{2}{3}$

Ε. Η ελεύθερη πτώση της μπάλας από το Α στο Ο διαρκεί χρόνο $t_1 = \sqrt{2H/g} \rightarrow t_1 = 0,8\text{s}$

Άρα η συνολική διάρκεια από το Α έως το Γ διαρκεί:

$$t_{\text{ολ}} = t_1 + \Delta t + t_2 = 0,8\text{s} + 0,2\text{s} + 0,4\text{s} \rightarrow t_{\text{ολ}} = 1,4\text{s}$$

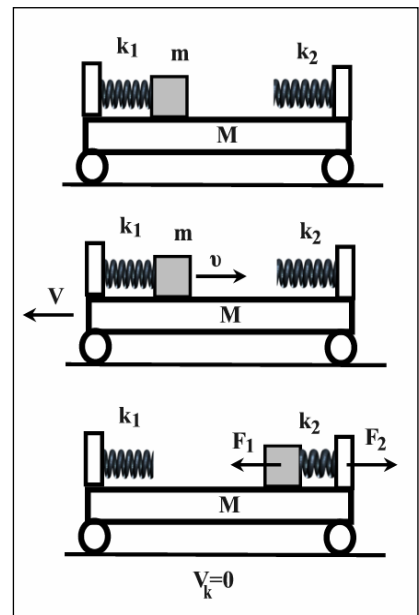
Δ.3.11 Το όχημα του σχήματος έχει μάζα $M=2\text{kg}$ και φέρει τα ελατήρια με σταθερές $k_1=150\text{N/m}$ και $k_2=600\text{N/m}$. Το σώμα μάζας $m=1\text{kg}$ τοποθετείται μπροστά από το ελατήριο k_1 χωρίς να είναι συνδεδεμένο μ' αυτό. Σπρώχνουμε το σώμα ώστε το ελατήριο να συσπειρωθεί κατά $x_1=0,2\text{m}$ κρατώντας σταθερό το όχημα και μετά το αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί χωρίς τριβές.

Α. Πόση είναι η ταχύτητα v του σώματος και η ταχύτητα V του οχήματος τη στιγμή που το m εγκαταλείπει το ελατήριο k_1 . Στη συνέχεια το σώμα m συναντά το ελεύθερο άκρο του ελατηρίου k_2 και το συσπειρώνει.

Β. Πόση είναι η ταχύτητα του οχήματος όταν το ελατήριο k_2 θα είναι σε μέγιστη συσπίρωση;

Γ. Πόση είναι η μέγιστη συσπίρωση του ελατηρίου x_2 ;

Δ. Ποιες είναι οι επιταχύνσεις σώματος και οχήματος όταν το ελατήριο k_2 θα είναι σε μέγιστη συσπίρωση;



Λύση

Α. Το σύστημα είναι μονωμένο και η αρχική του ορμή είναι μηδέν. Άρα η ορμή διατηρείται. Όταν το m θα έχει ταχύτητα v προς τα δεξιά εγκαταλείποντας το ελατήριο k_1 , το όχημα θα έχει V προς τ' αριστερά.

Από την ΑΔΟ ισχύει: $p_{\text{αρχ}} = p_{\text{τελ}} \rightarrow 0 = mv - MV \rightarrow V = v/2$ (1)

Αφού δεν ασκούνται μη συντηρητικές δυνάμεις η μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται:

$$E_{\text{αρχ}} = E_{\text{τελ}} \rightarrow U_{\text{αρχ}} + K_{\text{αρχ}} = U_{\text{τελ}} + K_{\text{τελ}} \rightarrow \frac{1}{2}k_1 x_1^2 + 0 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 \rightarrow k_1 x_1^2 = mv^2 + 2m \frac{v^2}{4}$$

$$\rightarrow v = x_1 \sqrt{\frac{2k_1}{3m}} \rightarrow v = 2\text{m/s} \quad \text{και από} \quad (1) \rightarrow V = 1\text{m/s}$$

Β. Το σώμα m κινούμενο προς τα δεξιά συναντά το ελατήριο k_2 και το συσπειρώνει. Στη μέγιστη συσπίρωση του ελατηρίου k_2 το σώμα παύει να κινείται ως προς το όχημα συνεπώς αποκτούν κοινή ταχύτητα V_k . Η ορμή όμως συνεχίζει να διατηρείται όσο η αρχική τιμή της δηλαδή μηδέν. Συνεπώς:

$$0 = (M+m)V_k \rightarrow V_k = 0 \text{ άρα } K'_{\text{τελ}} = 0$$

Γ. Από την ΑΔΜΕ που συνεχίζει να ισχύει:

$$U_{\text{αρχ}} + K_{\text{αρχ}} = U'_{\text{τελ}} + K'_{\text{τελ}} \rightarrow \frac{1}{2}k_1 x_1^2 = \frac{1}{2}k_2 x_2^2 \rightarrow x_2 = \frac{x_1}{2} \rightarrow x_2 = 0,1\text{m}$$

Δ. Καθώς το ελατήριο k_2 συσπειρώνεται το σώμα m δέχεται δύναμη $F_1 = k_2 x$ προς τ' αριστερά που το επιβραδύνει με μεταβλητή αρνητική επιτάχυνση μέτρου a_1 . Το όχημα ενώ κινείται προς τα αριστερά δέχεται την αντίδραση $F_2 = F_1$ προς τα δεξιά που και αυτή το επιβραδύνει αντίστοιχα με επιτάχυνση μέτρου a_2 . Τη στιγμή της μέγιστης συσπίρωσης και ενώ οι ταχύτητες θα είναι μηδέν οι ρυθμοί μεταβολής της ταχύτητας θα έχουν μέτρα:

$$a_1 = \frac{F_1}{m} = \frac{k_2 x_2}{m} = \frac{60\text{N}}{1\text{kg}} \rightarrow a_1 = 60\text{m/s}^2$$

$$a_2 = \frac{F_2}{M} = \frac{k_2 x_2}{M} = \frac{60\text{N}}{2\text{kg}} \rightarrow a_2 = 30\text{m/s}^2$$