

**ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ 1 ( Β' ΜΕΡΟΣ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ )**

**Άσκηση 1B**

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για τυχαίο  $x_0 \in \mathbb{R}$  ισχύει  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$ .

Από τη δοσμένη ανισότητα για  $y = x_0$  είναι  $(x - x_0)^2 \geq |f(x) - f(x_0)| \Leftrightarrow |x - x_0|^2 \geq |f(x) - f(x_0)| \Leftrightarrow \dots$   
 κάνοντας κατάλληλη εφαρμογή στο κριτήριο παρεμβολής.

**Άσκηση 2B**

i. Εφαρμογή στη δοσμένη σχέση για  $x = y = 0$ .

ii. Αρκεί για τυχαίο  $x_0 \in \mathbb{R}$  το  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$  να είναι πραγματικός αριθμός.

Με δεδομένο ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0)$  είναι  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0) + f(h) - 5x_0h - f(x_0)}{h} = \dots = f'(0) - 5x_0$

**Άσκηση 3B**

Από την  $f^2(x) + g^2(x+1) = x^4 - 2x^2 + 1$  για  $x = 1$  προκύπτει  $f(1) = g(2) = 0$ .

Επιπλέον  $f^2(x) + g^2(x+1) = x^4 - 2x^2 + 1 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{(x-1)^2} + \frac{g^2(x+1)}{(x-1)^2} = (x+1)^2$  και αφού

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x)}{(x-1)^2} = \dots = (f'(1))^2$  και  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g^2(x+1)}{(x-1)^2} \stackrel{u=x+1}{\lim_{u \rightarrow 2}} \dots = (g'(2))^2$  προκύπτει το ζητούμενο.

**Άσκηση 4B**

Από τη δοσμένη σχέση για  $x = 1$  προκύπτει  $f(1) = 7$  και εύκολα με κριτήριο παρεμβολής έπεται  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ .

Επίσης,  $2\sqrt{g(x)} + 5 \leq f(x) \leq g(x) + 6 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2\sqrt{g(x)} - 2}{x-1} \leq \frac{f(x) - 7}{x-1} \leq \frac{g(x) - 1}{x-1}, \text{ αν } x > 1 \\ \frac{2\sqrt{g(x)} - 2}{x-1} \geq \frac{f(x) - 7}{x-1} \geq \frac{g(x) - 1}{x-1}, \text{ αν } x < 1 \end{cases}$ , οπότε πάλι με κατάλληλη εφαρμογή

του κριτηρίου παρεμβολής έπεται ότι  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 7}{x - 1} = 1$ .

**Άσκηση 5B**

i. Θετώ  $g(x) = \frac{f(x)}{x-1} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \cdot (x-1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \dots = 0 = f(1)$ , αφού η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 1$ .

ii.  $g'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x) \frac{f(x)}{x-1} = 2f'(1) = 4$

**Άσκηση 6B**

i. Είναι γνησίως φθίνουσα άρα «1-1»

ii. Είναι για κάθε  $x \in (-1, 1)$   $f(f^{-1}(x)) = x \Rightarrow f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1}(x))' = 1 \dots \Rightarrow (f^{-1}(x))' = \frac{1}{-ημf^{-1}(x)}$ . Όμως

$ημf^{-1}(x) > 0$  (1), εφόσον  $f^{-1}(x) \in (0, \pi)$  και

$\sin f^{-1}(x) = x, \Leftrightarrow \stackrel{(1)}{ημf^{-1}(x)} = \sqrt{1 - x^2}, \dots (f^{-1}(x))' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}, x \in (-1, 1)$

iii. Κατ' αρχήν το  $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$  ανήκει στο διάστημα  $(-1, 1)$ , οπότε η ζητούμενη κλίση είναι:

$$(f^{-1})'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = \dots = -2$$

### Άσκηση 7B

α) Θέτω  $g(x) = \frac{f(x) - \eta\mu(x-1)}{x^2 - 1} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \cdot (x^2 - 1) + \eta\mu(x-1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \dots = 0$ .

Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 1$  άρα και συνεχής, οπότε  $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ .

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) \cdot (x^2 - 1) + \eta\mu(x-1)}{x - 1} = \dots = 5.$$

$$\beta) f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} \stackrel{\substack{\text{Θέτω } -x=u \\ \lim_{x \rightarrow -1} (-x)=1}}{=} \lim_{u \rightarrow 1} \frac{f(-u) - f(-1)}{-u + 1} = \dots = f'(1) = 5, \text{ αφού } f: \text{ περιττή.}$$

### Άσκηση 8B

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x^2) - f(1)}{x - 1} \stackrel{(1)}{=} \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{f(u) - f(1)}{\sqrt{u} - 1} = \dots = 2f'(1)$$

(Θέτω  $x^2 = u$  και για  $x \in (0, 1)$  είναι  $x = \sqrt{u}$ ,  $0 < u < 1$  και  $\lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1$ ) (1)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(2x - 1) - f(1)}{x - 1} \stackrel{(2)}{=} \lim_{u \rightarrow 1^+} \frac{f(u) - f(1)}{\frac{u+1}{2} - 1} = \dots = 2f'(1)$$

(Θέτω  $2x - 1 = u$  και για  $x > 1$  είναι  $x = \frac{u+1}{2}$ ,  $u > 1$  και  $\lim_{x \rightarrow 1^+} (2x - 1) = 1$ ) (2)

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι  $g'(1) = 2f'(1)$ .

### Άσκηση 9B

Θυμήσου ότι : Ένας αριθμός  $\rho$  είναι ρίζα ενός πολυωνύμου  $P(x)$  αν και μόνο αν το  $(x - \rho)$  είναι παράγοντάς του δηλαδή  $P(\rho) = 0 \Leftrightarrow P(x) = (x - \rho)Q(x)$

α) (Ευθύ) : Έστω  $A(\rho) = A'(\rho) = 0$ , τότε  $A(x) = (x - \rho)Q(x)$  άρα  $A'(x) = Q(x) + (x - \rho)Q'(x) \stackrel{A'(\rho)=0}{\Rightarrow} Q(\rho) = 0$  συνεπώς  $Q(x) = (x - \rho)\Pi(x)$ , οπότε  $A(x)B(x) = (x - \rho)^2 \Pi(x)B(x) \Leftrightarrow A(x)B(x) = (x - \rho)^2 f(x)$  με  $f(x) = \Pi(x)B(x)$ .

(Αντίστροφα) : Έστω ότι υπάρχει πολυώνυμο  $f(x)$  τέτοιο ώστε  $A(x) \cdot B(x) = (x - \rho)^2 f(x)$  (1), τότε :

$$A(\rho)B(\rho) = 0 \stackrel{B(\rho) \neq 0}{\Leftrightarrow} A(\rho) = 0, \text{ και παραγωγίζοντας την (1) προκύπτει εύκολα } A'(\rho) = 0.$$

β) Αν ονομάσουμε  $A(x) = vx^3 + kx^2 + \lambda x + 8$ ,  $B(x) = x^v$  τότε με βάση το ερώτημα α) το  $Q(x) = A(x)B(x)$

έχει παράγοντα το  $(x - 2)^2$ , αν και μόνο αν  $A(2) = A'(2) = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \kappa = 2 - 4v \\ \lambda = 4v - 8 \end{array} \right\}$ .

### Άσκηση 10B

Παρατηρήστε ότι το  $P(x) = ax^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ ,  $\alpha \neq 0$  γίνεται  $P(x) = \alpha(x - \rho_1)(x - \rho_2)(x - \rho_3)$ , οπότε η ζητούμενη σχέση προκύπτει με μία απλή παραγωγή και κατάλληλες πράξεις.

### Άσκηση 11B

Είναι  $f'(x) = e^x + xe^x$ ,  $f''(x) = 2e^x + xe^x$ ,  $f'''(x) = 3e^x + xe^x$ . Ισχυριζόμαστε ότι η ν-οστή παράγωγος της  $f(x) = x \cdot e^x$  είναι η  $f^{(v)}(x) = ve^x + xe^x$ .

Για  $v=1$  ισχύει, αφού  $f'(x) = e^x + xe^x$ . Δεχόμαστε ότι ισχύει για  $v = \kappa$ , δηλαδή,  $f^{(\kappa)}(x) = \kappa e^x + xe^x$ . Θα αποδείξουμε ότι ισχύει για  $v = \kappa + 1$ , δηλαδή,  $f^{(\kappa+1)}(x) = (\kappa + 1)e^x + xe^x$ .

$$\text{Οντως } f^{(\kappa+1)}(x) = (f^{(\kappa)}(x))' = (\kappa e^x + xe^x)' = \kappa e^x + e^x + xe^x = (\kappa + 1)e^x + xe^x$$

### Άσκηση 12B

Η εφαπτομένη της  $C_f$  στο τυχαίο σημείο της  $(x_1, f(x_1))$  είναι η

$$(\varepsilon_1): y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow y = -4x_1x + 2x_1^2 \text{ ενώ της } C_g \text{ στο τυχαίο σημείο της } (x_2, g(x_2)) \text{ είναι η } (\varepsilon_2): y - g(x_2) = g'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow y = e^{x_2}x + e^{x_2}(1 - x_2).$$

$$\text{Οι δύο εφαπτόμενες συμπίπτουν αν και μόνο αν } \begin{cases} -4x_1 = e^{x_2} \\ 2x_1^2 = e^{x_2}(1 - x_2) \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{4}e^{x_2} \\ e^{x_2} + 8x_2 - 8 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Παρατηρήστε με χρήση του Θ. Bolzano ότι η εξίσωση (1) έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο  $(0,1)$  η οποία είναι η μοναδική στο  $\mathbb{R}$  λόγω μονοτονίας (εύκολα προκύπτει ότι η  $h(x) = e^x + 8x - 8$  είναι γν. αύξουσα) συνεπώς αποδεικνύεται το ζητούμενο.

### Άσκηση 13 B

Κατ' αρχήν είναι  $\varphi(0) = 0$ .

$$\text{Έχουμε } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x\sqrt{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0, \text{ οπότε και } \varphi'(0) = 0$$

Άρα η εξίσωση εφαπτομένης της  $C_\varphi$  στο σημείο  $O(0,0)$  είναι η  $y - 0 = 0(x - 0) \Leftrightarrow y = 0$ .

**Παρατήρηση :** Δουλέψαμε με όριο γιατί η  $\sqrt{x}$  δεν παραγωγίζεται στο 0 άρα δεν εφαρμόζεται ο κανόνας παραγωγισής

### Άσκηση 14B

Αφού η  $f$  είναι παραγωγίσιμη, παραγωγίζω και τα δύο μέλη της ισότητας και στη συνέχεια για  $x = 0$  προκύπτει  $f'(2) = -1$ .

### Άσκηση 15B

i. Από τη δοσμένη σχέση για  $x = 0$  προκύπτει εύκολα  $f(0) = 0$ .

ii. Παραγωγίζοντας τη δοσμένη σχέση προκύπτει  $6f^2(x)f'(x) + 6f'(x) = \frac{2}{5}x + 2x^2 + 3 - \sin x$  από την οποία εύκολα έπεται  $f'(0) = \frac{1}{3}$ , άρα η ζητούμενη εφαπτομένη είναι η  $(\varepsilon): y = \frac{1}{3}x$ .

### Άσκηση 16B

i. Για  $x = 0 \dots f(0) = -1$ .

ii. Αφού η  $f$  είναι παραγωγίσιμη, παραγωγίζω και τα δύο μέλη της ισότητας και στη συνέχεια για  $x = 0$  προκύπτει  $f'(0) = \frac{\alpha}{3}$ . Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι  $\varepsilon: y = \frac{\alpha}{3}x - 1$ .

iii. Αν η  $\varepsilon$  εφάπτεται στην  $C_g$  στο  $B(x_0, g(x_0))$ , το παρακάτω σύστημα θα έχει λύση ως προς  $x_0$ .

$$\begin{cases} g'(x_0) = \frac{\alpha}{3} \\ B(x_0, g(x_0)) \in \varepsilon \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0 + 1 = \frac{\alpha}{3} \\ g(x_0) = \frac{\alpha}{3}x_0 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \begin{cases} x_0 = 1 \\ \alpha = 9 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x_0 = -1 \\ \alpha = -3 \end{cases}.$$

### Άσκηση 17B

α) Έστω  $g(x) = 4x^2 \ln x - 1 - 4x^2$ ,  $A_g = [e, e^2]$ . Η  $g$  είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της με  $g(e) = -1 < 0$  και  $g(e^2) = 4e^4 - 1 > 0$  οπότε από θεώρημα Bolzano...

β) Καταρχήν ελέγχουμε αν έχουν κοινό σημείο. Είναι  $f(x) = \varphi(x) \Leftrightarrow \ln x = -x^2 \Leftrightarrow \ln x + x^2 = 0$ , όπου επειδή  $x \in (e, e^2)$ , διαπιστώνουμε ότι δεν υπάρχει κοινό σημείο. Έστω  $A(\alpha, f(\alpha)), \alpha \in (e, e^2)$  και  $B(\beta, \varphi(\beta)), \beta \in \mathbb{R}$  τα σημεία, όπου η κοινή εφαπτομένη, εφάπτεται στις  $C_f$  και  $C_\varphi$  αντίστοιχα. Τότε θα πρέπει το παρακάτω σύστημα να έχει λύση:

$$\begin{cases} f'(\alpha) = \varphi'(\beta) \\ f(\alpha) - \alpha f'(\alpha) = \varphi(\beta) - \beta \varphi'(\beta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\alpha} = -2\beta \\ \ln \alpha - \alpha \frac{1}{\alpha} = -\beta^2 - \beta(-2\beta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -\frac{1}{2\alpha} \\ \ln \alpha - 1 = \beta^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -\frac{1}{2\alpha} \\ \ln \alpha - 1 = \frac{1}{4\alpha^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -\frac{1}{2\alpha} \\ 4\alpha^2 \ln \alpha - 4\alpha^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

που από το πρώτο ερώτημα η  $4\alpha^2 \ln \alpha - 4\alpha^2 - 1 = 0$  επιδέχεται τουλάχιστον μια λύση στο  $(e, e^2)$ .

### Άσκηση 18B

Έστω  $A(\alpha, f(\alpha)), \alpha \in \mathbb{R}$  και  $B(\beta, \varphi(\beta)), \beta \in \mathbb{R}^*$  τα σημεία, όπου η κοινή εφαπτομένη, εφάπτεται στις  $C_f$  και  $C_\varphi$  αντίστοιχα. Τότε θα πρέπει το παρακάτω σύστημα να έχει λύση:

$$\begin{cases} f'(\alpha) = \varphi'(\beta) \\ f(\alpha) - \alpha f'(\alpha) = \varphi(\beta) - \beta \varphi'(\beta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha = -\frac{1}{\beta^2} \\ \alpha^2 - \alpha(2\alpha) = \frac{1}{\beta} - \beta\left(-\frac{1}{\beta^2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{2\beta^2} \\ -\alpha^2 = \frac{2}{\beta} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{2\beta^2} \\ -\frac{1}{4\beta^4} = \frac{2}{\beta} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{2\beta^2} \\ \beta = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Οπότε τα σημεία επαφής είναι τα  $A(-2, 4)$  και  $B\left(-\frac{1}{2}, -2\right)$  και η κοινή εφαπτομένη η ευθεία  $y = -4x - 4$ .

### Άσκηση 19B

i. Το σημείο  $M(\alpha, \beta) \notin C_f$  αφού  $f(\alpha) = \frac{1}{2}\alpha^2 > \beta$ . Η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο της  $A\left(x_0, \frac{1}{2}x_0^2\right)$

είναι η  $\varepsilon: y - \frac{1}{2}x_0^2 = x_0(x - x_0)$ . Όμως  $M(\alpha, \beta) \in \varepsilon \Leftrightarrow \beta - \frac{1}{2}x_0^2 = x_0(\alpha - x_0) \Leftrightarrow x_0^2 - 2\alpha x_0 + 2\beta = 0 \quad (1)$ .

Η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες, αφού  $\Delta = 4\alpha^2 - 8\beta > 0$ . Έτσι υπάρχουν δύο εφαπτόμενες που διέρχονται από το M.

ii.  $M(\alpha, \beta) \in \varepsilon': y = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \beta = -\frac{1}{2}$ . Τότε  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = x_1 \cdot x_2 = 2\beta = -1 \Leftrightarrow \varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$

### Άσκηση 20B

Είναι  $\varphi'(x) = (\alpha \cdot \ln x + x)' = \frac{\alpha}{x} + 1$ , οπότε  $\varphi'(x_0) = \frac{\alpha}{x_0} + 1$  και  $\varphi(x_0) = \alpha \cdot \ln x_0 + x_0$ . Η εξίσωση της

εφαπτομένης στο  $(x_0, \varphi(x_0))$  είναι η:  $y - \varphi(x_0) = \varphi'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow \dots \Rightarrow y = \left(\frac{\alpha}{x_0} + 1\right)x + \alpha(\ln x_0 - 1)$ . Για να

εφάπτεται η  $(\varepsilon): y = 2x + 1$  στη γραφική παράσταση της  $\varphi$ , θα πρέπει το σύστημα

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{x_0} + 1 = 2 \\ \alpha(\ln x_0 - 1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \alpha \\ \alpha(\ln \alpha - 1) - 1 = 0 \end{cases} \text{ να έχει λύση.}$$

Θεωρούμε τη  $g(t) = t(\ln t - 1) - 1$  με  $t \in [1, e^2]$ . Η  $g$  είναι συνεχής, με  $g(1) = -2 < 0$  και  $g(e^2) = e^2 - 1 > 0$ , οπότε

Bolzano... Άρα υπάρχει  $\alpha$  τέτοιο ώστε η ευθεία  $(\varepsilon): y = 2x + 1$  να εφάπτεται της γραφικής παράστασης της  $\varphi$ .

### Άσκηση 21B

Αρκεί  $A \in (\varepsilon) \Leftrightarrow f(x_0) = 2x_0 - 3$  (1) και  $\lambda_\varepsilon = f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x_0) = 2$  (2).

Αν θέσουμε  $\frac{f(x) - 2x + 3}{x - x_0} = g(x)$ , τότε προκύπτουν εύκολα

$$f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \dots = 2x_0 - 3 \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \dots = 2$$

συνεπώς αποδεικνύονται οι ζητούμενες σχέσεις (1), (2).

### Άσκηση 22B

Η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 1$  άρα .....  $\alpha = 3$

Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 1$  άρα

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + \beta x - \beta - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x + 3x - 3}{x - 1} \Rightarrow \dots \Rightarrow \beta = 2.$$

(Χρησιμοποιήθηκε το  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x}{x - 1} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} = 1$ )

### Άσκηση 23B

Αρκεί να δείξω ότι  $f'(x_0) = g'(x_0)$ .

Από την iii. αν παραγωγίσουμε και τα δύο μέλη προκύπτει (για  $x = x_0$ ):

$$2h'(x_0) \cdot [h(x_0) + h''(x_0)] = 0 \Rightarrow h''(x_0) = -h(x_0) \quad (1), \text{ αφού αν ήταν}$$

$$h'(x_0) = 0 \Rightarrow g(x_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x_0) = 0 \text{ άτοπο (από την i).}$$

Από την ii. για  $x = x_0$  προκύπτει  $g(x_0) = f(x_0) \cdot h'(x_0) \Rightarrow h'(x_0) = 1$ . (2)

Από την iii. για  $x = x_0$  προκύπτει  $h^2(x_0) + [h'(x_0)]^2 \stackrel{(2)}{=} 1 \Rightarrow h(x_0) = 0$ . (3)

Από την ii. προκύπτει  $g'(x_0) = f'(x_0) \cdot h'(x_0) + f(x_0) \cdot h''(x_0) \stackrel{(1), (2)}{=} f'(x_0) - g(x_0) \cdot h(x_0) \stackrel{(3)}{=} f'(x_0)$

### Άσκηση 24B

i. Είναι  $f(x) \leq x^2 + x$  (1).

Στην ανισότητα θέτω  $x - 1 = u$  και μετά από πράξεις προκύπτει  $f(u) \geq u^2 + u$ , για κάθε  $u \in \mathbb{R}$  (2).

Από (1), (2) έχουμε  $f(x) = x^2 + x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

ii. Έστω  $M\left(\alpha, -\frac{1}{2}\right)$  ένα σημείο της ευθείας και  $A(x_0, f(x_0))$  το σημείο επαφής.

$$M\left(\alpha, -\frac{1}{2}\right) \in \varepsilon: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow 2x_0^2 - 4\alpha x_0 - 1 - 2\alpha = 0$$

Είναι  $\Delta = 16\alpha^2 + 16\alpha + 8 > 0$ , άρα έχουμε δύο εφαιπόμενες με  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = (2x_1 + 1) \cdot (2x_2 + 1) = \dots = -1$ . Άρα

$\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$ .

### Άσκηση 25B

α) Έστω ότι η  $f - g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ . Τότε η συνάρτηση  $f = g + (f - g)$  είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Αυτό είναι άτοπο, αφού η  $f$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ .

β) Εφαρμογή του α) για  $f(x) = \sqrt{x}$  και  $g(x) = \sqrt{e^x + 1} - \eta\mu x$ .

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{e^x - \sigma\upsilon\nu x}{2\sqrt{e^x + 1} - \eta\mu x}, \quad x > 0.$$

### Άσκηση 26B

Ζητάμε την παράγωγο  $\frac{dg}{dx} = g'(x)$  ως συνάρτηση του  $g(x)$ . Απλά είναι  $g'(x) = \dots = \mu Me^{-\mu x}$

με  $Me^{-\mu x} = M_0 + M - g(x)$  οπότε  $g'(x) = \mu(M_0 + M - g(x))$ .

Παρατηρήστε ότι  $g(0) = M_0$  άρα ...

### Άσκηση 27B

i. Είναι  $y'(t_0) = \frac{x'(t_0)}{2\sqrt{x(t_0)}} = 1 \text{ cm/sec}$ .

ii. Αν  $\omega(t)$  η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα  $\vec{OM}$  με τον άξονα  $x'x$  ισχύει  $\varepsilon\varphi\omega(t) = \frac{y(t)}{x(t)}$ . Παραγωγίζω ως

προς  $t$  και προκύπτει  $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega(t)} \cdot \omega'(t) = \frac{y'(t) \cdot x(t) - y(t) \cdot x'(t)}{x^2(t)}$ . Για  $t = t_0$  και με  $\sigma\upsilon\nu^2\omega(t) = \frac{x^2(t_0)}{x^2(t_0) + y^2(t_0)}$

προκύπτει ότι  $\omega'(t_0) = -\frac{1}{5} \text{ rad/sec}$ .

### Άσκηση 28B

i) Είναι  $\left(\varepsilon\varphi\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{\frac{\ln\left(\left(\varepsilon\varphi\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\ln x}}\right)}{\ln x}} = e^{\frac{\ln\left(\varepsilon\varphi\frac{x}{2}\right)}{\ln x}}$  με  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varepsilon\varphi\frac{x}{2} = 0$  άρα  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(\varepsilon\varphi\frac{x}{2}\right) \stackrel{u=\varepsilon\varphi\frac{x}{2} > 0 \text{ κοντά στο } 0^+}{=} \lim_{\substack{\varepsilon\varphi\frac{x}{2} \rightarrow 0 \\ x \rightarrow 0^+}} = \dots = -\infty$

άρα  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln\left(\varepsilon\varphi\frac{x}{2}\right)}{\ln x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty} \text{ παραγωγίσιμες κοντά στο } 0^+}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\ln\left(\varepsilon\varphi\frac{x}{2}\right)\right)'}{(\ln x)'} = \dots = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\eta\mu x} = 1$ , οπότε

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\varepsilon\varphi\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln\left(\varepsilon\varphi\frac{x}{2}\right)}{\ln x}} \stackrel{u=\frac{\ln\left(\varepsilon\varphi\frac{x}{2}\right)}{\ln x}}{=} \lim_{\substack{u \rightarrow 1 \\ x \rightarrow 0^+}} \lim_{u \rightarrow 1} e^u = e$

ii) Είναι  $(e^x + x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln\left((e^x + x)^{\frac{1}{x}}\right)}{x}} = e^{\frac{\ln(e^x + x)}{x}}$  με  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x + x)}{x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{e^x}} = 1$

άρα  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln(e^x + x)}{x}} \stackrel{u=\frac{\ln(e^x + x)}{x}}{=} \lim_{\substack{u \rightarrow 1 \\ x \rightarrow +\infty}} \lim_{u \rightarrow 1} e^u = e$ .

iii) Είναι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{2} - \ln\frac{x^2 + 1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2}{2} \left(1 - \frac{\ln\frac{x^2 + 1}{x}}{\frac{x^2}{2}}\right)\right] \quad (1) \text{ και αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\frac{x^2 + 1}{x}}{\frac{x^2}{2}} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x^4 + x^2} = \dots = 0$

από την (1) έπεται ότι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{2} - \ln\frac{x^2 + 1}{x}\right) = +\infty$ .

### Άσκηση 29B

Είναι  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$  γιατί η  $f$  είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο 1 .

οπότε  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(e^{x-1} + 1)f(x) - 5x^2 - 3}{\ln x} \stackrel{\%}{=} \dots = -10$  ( είναι  $\lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = f'(1)$  γιατί η  $f'$  είναι συνεχής στο 1 ).

### Άσκηση 30 B

Είναι  $f'(x) = \sin x$ , οπότε η κλίση της εφαπτομένης της  $C_f$  στο σημείο  $A(x_0, f(x_0))$  είναι  $f'(x_0) = \sin x_0$ .

Όμως η κλίση της εφαπτομένης της  $C_f$  είναι ίση με  $\epsilon\phi\omega$ , οπότε θα πρέπει:  $\epsilon\phi\omega = \sin x_0$ . Εφόσον το συνημίτονο παίρνει όλες τις τιμές από το -1 μέχρι το 1, θα πρέπει να ισχύει και το ίδιο για την εφαπτομένη της γωνίας  $\omega$ , και

επειδή  $0^\circ \leq \hat{\omega} < 180^\circ$ , η γωνία  $\omega$  θα ανήκει στο σύνολο  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$ .

### Άσκηση 31 B

Ισχύει ότι αν οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες στο σημείο  $x_0 = \alpha$  και  $g(\alpha) \neq 0$  θα είναι παραγωγίσιμη

στο σημείο  $x_0 = \alpha$  και η  $h = \frac{f}{g}$ , με  $h'(\alpha) = \left(\frac{f}{g}\right)'(\alpha) = \frac{f'(\alpha)g(\alpha) - f(\alpha)g'(\alpha)}{g^2(\alpha)}$ .

Όμως  $h'(\alpha) = 0$ , δηλαδή,  $\frac{f'(\alpha)g(\alpha) - f(\alpha)g'(\alpha)}{g^2(\alpha)} = 0 \Leftrightarrow f'(\alpha)g(\alpha) - f(\alpha)g'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f'(\alpha)g(\alpha) = f(\alpha)g'(\alpha) \Leftrightarrow \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)} = \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}$ . Όμως  $h(\alpha) = \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}$ , οπότε και  $h(\alpha) = \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$ .

### Άσκηση 32 B

Αρχικά εύκολα βλέπουμε ότι **το μηδενικό πολυώνυμο** πληροί το ζητούμενο, άρα **αποτελεί λύση**. Επίσης από τη σχέση  $(\varphi'(x))^2 = \varphi(x)$  το ζητούμενο πολυώνυμο δεν μπορεί να είναι ούτε μηδενικού ούτε πρώτου βαθμού.

Έστω  $\beta\alpha\theta(\varphi(x)) = v, v \geq 2$ . Τότε από τη σχέση που θέλουμε προκύπτει ως αναγκαία σχέση  $\beta\alpha\theta(\varphi'(x))^2 = \beta\alpha\theta(\varphi(x)) \Rightarrow 2v - 2 = v \Rightarrow v = 2$ . Έστω  $\varphi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha \neq 0$  τότε αφού  $\varphi'(4) = 0 \Leftrightarrow \beta = -8\alpha$ .

Επίσης θέλουμε για κάθε πραγματικό  $x : (2\alpha x - 8\alpha)^2 = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \quad \alpha \neq 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{4}, \beta = -2, \gamma = 4$ .

Άρα  $\varphi(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 4$  ή το μηδενικό πολυώνυμο.

Αν είναι το μηδενικό πολυώνυμο δεν υπάρχει εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης παράλληλη στην  $(\epsilon) : y = -x + 1$ . Αν  $\varphi(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 4$ , θέλουμε α ώστε  $\varphi'(\alpha) = -1 \Leftrightarrow \dots \alpha = 2 \dots$  οπότε η ζητούμενη ευθεία είναι η  $(\zeta) : y = -x + 5$

### Άσκηση 33 B

i. Κατ' αρχήν είναι  $A_\varphi = \mathbb{R}$  και η  $\varphi(x)$  γράφεται:

$\varphi(x) = |x|^{\frac{6}{4}} = \begin{cases} x^{\frac{6}{4}}, & x \geq 0 \\ (-x)^{\frac{6}{4}}, & x < 0 \end{cases}$ . Για  $x \neq 0$  η  $\varphi$  είναι παραγωγίσιμη. Αν  $x > 0$  ισχύει  $f'(x) = \frac{6}{4}x^{\frac{2}{4}}$ , ενώ αν  $x < 0$

ισχύει  $f'(x) = -\frac{6}{4}(-x)^{\frac{2}{4}}$

Ελέγχουμε με πλευρικά όρια την παραγωγισιμότητα στο  $x_0 = 0$ . Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{\frac{6}{4}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{2}{4}} = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(-x)^{\frac{6}{4}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{(-x)^{\frac{6}{4}}}{(-x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -(-x)^{\frac{2}{4}} = 0,$$

οπότε  $\varphi'(0) = 0$ . Άρα η  $\varphi$  είναι παραγωγίσιμη σε όλο το  $\mathbb{R}$ .

Οπότε η ευθεία η οποία εφάπτεται της  $\varphi$  στο  $O(0,0)$  είναι η  $y - 0 = 0(x - 0) \Leftrightarrow y = 0$ .

ii. Κατ' αρχήν πρέπει  $\eta\mu x > 0$ , που ισχύει, αφού  $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ . Είναι  $g(x) = e^{\ln(\eta\mu x)^x} = e^{x \ln(\eta\mu x)}$ , οπότε

$$g'(x) = \left(e^{x \ln(\eta\mu x)}\right)' = e^{x \ln(\eta\mu x)} (x \ln(\eta\mu x))' = (\eta\mu x)^x \left(\ln(\eta\mu x) + x \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}\right) = (\eta\mu x)^x (\ln(\eta\mu x) + x \sigma\phi x) < 0, \text{ αφού}$$

$x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ , οπότε  $\sigma\phi x < 0$  και  $\eta\mu x \in (0, 1)$ , άρα και  $\ln(\eta\mu x) < 0$ . Άρα δεν υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής

παράστασης παράλληλη στην ευθεία  $y = 0$ .

### Άσκηση 34 Β

α) Αν  $x \neq 0, x \neq 1$

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots + vx^{v-1} = (x + x^2 + x^3 + \dots + x^v)' \stackrel{x \neq 1}{=} \left(x \cdot \frac{x^v - 1}{x - 1}\right)' = \left(\frac{x^{v+1} - x}{x - 1}\right)' = \frac{vx^{v+1} - (v+1)x^v + 1}{(x - 1)^2}$$

Για  $x = 1$  το άθροισμα γίνεται:  $1 + 2 + 3 + \dots + v = \frac{v(v+1)}{2}$

Για  $x = 0$  το άθροισμα ισούται με 1

β) Προκύπτει από το παραπάνω άθροισμα για  $x = \frac{1}{2}$ . Είναι:

$$2 + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \frac{5}{16} + \dots + \frac{20}{2^{19}} = 1 + 2 \frac{1}{2} + 3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + 20 \left(\frac{1}{2}\right)^{19} \stackrel{v=20}{=} \frac{20 \left(\frac{1}{2}\right)^{20+1} - (20+1) \left(\frac{1}{2}\right)^{20} + 1}{\left(\frac{1}{2} - 1\right)^2} = \dots = \frac{-44 + 2^{22}}{2^{20}}$$

### Άσκηση 35 Β

Έστω  $x$  τα έξοδα για διαφήμιση. Έσοδα:  $34\sqrt{x}$  Έξοδα:  $10\sqrt{x} + x$ , άρα κέρδος  $K(x) = 24\sqrt{x} - x$ . Θέλω

$$K'(x) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{12}{\sqrt{x}} \leq 1 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x \geq 144, \text{ άρα το ανώτατο ποσόν είναι } 144000 \text{ ευρώ.}$$