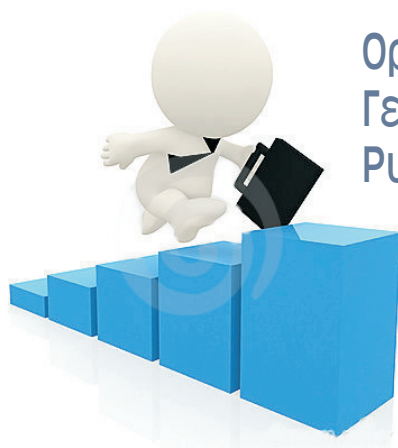


Διαφορικός Λογισμός- I



Ορισμός Παραγώγου -
Γεωμετρική Ερμηνεία -
Ρυθμός Μεταβολής

2.1

2.4

Δ. Βαμπούλης Φ. Γκάγκαρη, Κ. Ζέκιος Α. Ζησόπουλος, Γ. Θεοδωρόπουλος,
Π.Ίσσαρης, Φ. Καλογεροπούλου, Γ.Καλούτσας, Ν. Καντεράκης, Κ.Καρδαράκος,
Π.Λιναρδάκης, Α. Μαλάμου, Ν. Μπέντα, Π. Νικολέλλης, Β. Ντούσης,
Α. Παπαβασιλείου, Π. Παπαθανασίου, Α. Σούλη, Μ. Τσιλιπιδής, Γ. Χρονόπουλος.

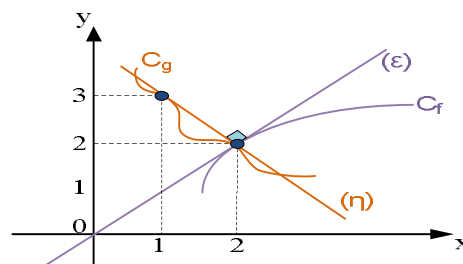
Συντονισμός Μαθηματικών

1. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η συνάρτηση $g(x) = |x - \alpha| \cdot f(x)$ έχει παράγωγο στο $x_0 = \alpha$, τότε να δείξετε ότι ο αριθμός α είναι ρίζα της f .

2. Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία υπάρχει η παράγωγος $f'(\alpha)$ με $\alpha \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε τα όρια :

i) $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\alpha^2 \cdot f(x) - x^2 \cdot f(\alpha)}{x - \alpha}$, ii) $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{(f(x))^2 - (f(\alpha))^2}{\sqrt{x} - \sqrt{\alpha}}$, $\alpha > 0$ και iii) $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{|f(x)| - |f(\alpha)|}{x - \alpha}$,
 $f(\alpha) \neq 0$

3. Στο διπλανό σχήμα οι ευθείες (ε) και (η) είναι εφαπτόμενες στο κοινό σημείο των C_f και C_g με τετμημένη $x_0 = 2$. Να βρείτε τις τιμές $(f \circ g)(2)$, $(g \circ f')(2)$, $(f - g)'(2)$, $(f \cdot g)'(2)$ και $\left(\frac{f}{g}\right)'(2)$.



4. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $[f(x)]^3 - x[f(x)]^2 + x^2 f(x) = x^2 \eta \mu x$ να δείξετε ότι $f'(0) = 1$.

5. Έστω f, g συναρτήσεις ορισμένες στο $\mathbb{R}$ και παραγωγίσιμες στο $x_0 = 0$. Αν είναι $f(0) = g(0)$ και $f(x) + x \geq g(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι : $g'(0) - f'(0) = 1$.

6. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει: $f(x) - f(x-1) = 6x - 3$ (1) και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \sqrt{x+1}}{x} = -\frac{1}{2}$ (2). Αν η f είναι συνεχής στο 0, να βρείτε τα:

α) $f'(0)$ και β) $f'(1)$

7. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta x + 2 & , x < 2 \\ \gamma x^2 + x + 4 & , x \geq 2 \end{cases}$. Να βρείτε τα α, β, γ για τα οποία η C_f έχει εφαπτομένη στο $A(2, f(2))$ κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: x - 3y + 2 = 0$.

8. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ και ισχύει $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^*$.

i. Να βρείτε το $f(1)$.

ii. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 με $f'(1) = 1$, να αποδείξετε ότι $f'(x) = \frac{f(x)}{x}$ για κάθε $x \neq 0$.

9. Θεωρούμε συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(x+y) = e^x f(y) + e^y f(x) + xy + \alpha$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.
- Να δείξετε ότι $f(0) = -\alpha$.
 - Να δείξετε ότι η C_f διέρχεται από το $O(0,0)$.
 - Να δείξετε ότι: $f'(x) = f(x) + f'(0)e^x + x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
10. Έστω ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο $\mathbb{R}^*$, έχει θετικές τιμές και ισχύει $f^2(x) - \frac{f(x)}{x} = 6 \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$.
- Να αποδείξετε ότι $f(1) = 3$.
 - Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1,3)$.
 - Αν g είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια, ώστε να ισχύει:
 $5g(x+1) - g(1-x) = 10x + 12, \quad \forall x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι :
 - η C_g διέρχεται από το σημείο A ,
 - η εφαπτομένη της C_f στο σημείο A είναι κάθετη της εφαπτομένης της C_g στο σημείο αυτό.
11. α) Αν η συνάρτηση φ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και άρτια (περιττή) να αποδείξετε ότι η πρώτη παράγωγός της είναι περιττή (άρτια) και η δεύτερη παράγωγός της είναι άρτια (περιττή).
- β) Αν φ είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη και άρτια και $g(x) = \left(\frac{x^4}{2} + 2\right)\varphi(x) + 3x$, να δείξετε ότι $g'(0) = 3$.
12. Α. Να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση της συνάρτησης $h(x) = \sqrt{x} \cdot \eta\mu x, x \in [0, +\infty)$.
- Β. Αν $f(x) = x^x, x > 0$ και $g(x) = \sqrt{x} \cdot \eta\mu x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, τότε :
- Να βρείτε την εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της f , η οποία είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.
 - Να εξετάσετε αν υπάρχουν εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της g οι οποίες να είναι παράλληλες στην (ε).
13. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(\ln x) = x \cdot \ln x - x, x > 0$.
- Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της πρώτης παραγώγου της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
 - Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη 0.
 - Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου το οποίο σχηματίζεται από την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη 1 και τους άξονες xx', yy' .

14. Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ συνάρτηση f , για την οποία ισχύει, ότι για κάθε $x > 0$, $f(\sqrt{x}) = e^{1+\sqrt{x}} - 3\sqrt{x}$. Να βρείτε τον αριθμό $f'(0)$.
15. Έστω $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$ και $\varphi(x) = x^2 - 3x + 1$. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές τους παραστάσεις δέχονται κοινή εφαπτομένη σε ένα κοινό τους σημείο, του οποίου να υπολογίσετε τις συντεταγμένες.
16. Έστω $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Να βρείτε τον a ώστε η $(\varepsilon): y = x$ να εφάπτεται της γραφικής παράστασης της f .
17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι από κάθε σημείο του επιπέδου άγεται μία τουλάχιστον εφαπτόμενη στη γραφική της παράσταση.
18. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 3x + 5$ και $g(x) = x^2 - 5x + 8$. Να βρείτε την κοινή εφαπτομένη των C_f , C_g .
19. Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = -e^{2x}$ και $g(x) = e^{2x} \cdot \eta\mu(3x)$. Να αποδείξετε ότι έχουν κοινή εφαπτομένη σε κάθε κοινό τους σημείο.
20. Έστω συνάρτηση f τέτοια ώστε για κάθε πραγματικό x να ισχύει $8x \leq f(x) \leq x^2 + 16$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(4, f(4))$.
21. Θεωρούμε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων όπου ο $x'x$ βρίσκεται στην επιφάνεια της θάλασσας και ο $y'y$ είναι ένας κατακόρυφος βράχος. Ένας γλάρος πετάει ευρισκόμενος διαρκώς στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \ln x$, $x > 0$ και έτσι ώστε να κατεβαίνει προς τη θάλασσα με τη ματιά του να ακολουθεί πάντα ευθύγραμμη πορεία εφαπτόμενη της καμπύλης στο σημείο στο οποίο κάθε φορά βρίσκεται.
- Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ακολουθεί η πορεία της ματιάς του όταν βρίσκεται στο τυχαίο σημείο $A(\alpha, \ln \alpha)$.
 - Να βρείτε το σημείο της επιφάνειας της θάλασσας στο οποίο βρίσκεται μία μαρίδα, αν ξέρετε ότι τη στιγμή που τη βλέπει ο γλάρος η απόστασή του από τη θάλασσα είναι 0,5 μονάδες.
 - Αν ξέρετε ότι ο γλάρος πετάει κατά τέτοιον τρόπο, ώστε ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του σημείου στο οποίο βρίσκεται κάθε στιγμή να είναι -2 μονάδες ανά δευτερόλεπτο να βρείτε :
 - Το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου στο οποίο βρίσκεται τη χρονική στιγμή κατά την οποία βλέπει τη μαρίδα (ερώτημα ii).
 - Το ρυθμό μεταβολής της γωνίας που σχηματίζει η πορεία της ματιάς του με την επιφάνεια της θάλασσας τη χρονική στιγμή που η τεταγμένη του σημείου στο οποίο βρίσκεται είναι 3 μονάδες.
22. Ένα σημείο M κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = (x - 1)^2$. Η τεταγμένη του M είναι θετική και απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων με ρυθμό 2. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο M με τον άξονα $x'x$ όταν αυτή είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $x - y + 1 = 0$, καθώς και την τεταγμένη x του M τη στιγμή εκείνη.

23. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

$$\text{i)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 3x - 1}{\sin x - 1} \quad \text{ii)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\phi x} - x}{x^3} \quad \text{iii)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax) - \sin(\beta x)}{x^2}$$

$$\text{iv)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1 + e^{-x})}{x} \quad \text{v)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln|x|}{\sqrt[3]{1-x^3}} \quad \text{vi)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2 x}{\sqrt{\frac{1}{x}}}$$

$$\text{vii)} \lim_{x \rightarrow 0} (x^3 \ln^2 x) \quad \text{viii)} \lim_{x \rightarrow e} [\ln(x - e)(\ln x - 1)] \quad \text{ix)} \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 e^x) \quad \text{x)} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x)$$

24. Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_+$ με $f(1) = f''(1) = 2$ και $f'(1) = -\frac{1}{2}$ να

$$\text{υπολογίσετε το } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) \cdot f'(x) + f(x)}{\sqrt{x} - 1}.$$

25. Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2} = f''(x_0).$$

26. Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα Δ , $1 \in \Delta$ και παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ με

$$f(1) = f'(1) = -2. \text{ Να υπολογίσετε το όριο } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2xf(x) + 4}{\ln x}.$$

Συμπληρωματικές ασκήσεις για εξάσκηση και εμπάθυνση

- Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(x-y)^2 \geq |f(x)-f(y)|$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.
Να δείξετε ότι για τυχαίο $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει $f'(x_0) = 0$.
- Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ να ισχύει $f(x+y) = f(x) + f(y) - 5xy$.
i. Να βρείτε το $f(0)$.
ii. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 , να αποδείξετε ότι είναι και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
- Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στα 1 και 2 αντίστοιχα και επιπλέον
 $f^2(x) + g^2(x+1) = x^4 - 2x^2 + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $(f'(1))^2 + (g'(2))^2 = 4$.
- Θεωρούμε f, g συναρτήσεις ορισμένες στο $\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν: $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
 $g(1) = 1$, $g'(1) = 1$ και $2\sqrt{g(x)} + 1 \leq f(x) - 4 \leq g(x) + 2$ για κάθε $x \geq 0$. Να αποδείξετε ότι η
συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο 1 .
- Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και συνεχής στο $x_0 = 1$. Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 2$. Τότε:
i. Να δείξετε ότι $f(1) = 0$
ii. Να βρείτε την παράγωγο στο $x_0 = 1$ της $g(x) = (x^2 + x)f(x)$.
- Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x) = \sin x$, $x \in (0, \pi)$.
i. Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.
ii. Αν η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη, να βρείτε την $[f^{-1}(x)]'$.
iii. Να βρείτε την κλίση της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο της με τετμημένη $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ περιττή και παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - \eta\mu(x-1)}{x^2 - 1} = 2$ να βρείτε τα:
α) $f'(1)$ και β) $f'(-1)$.
- Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, να δείξετε ότι και η συνάρτηση
 $g(x) = \begin{cases} f(x^2) & , x \leq 1 \\ f(2x-1) & , x > 1 \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ με $g'(1) = 2f'(1)$.
- α) Έστω ρ πραγματικός αριθμός, $A(x), B(x)$ πολυώνυμα με πραγματικούς συντελεστές και
τέτοια ώστε $B(\rho) \neq 0$ και το $A(x)$ έχει βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 2 . Να αποδείξετε ότι υπάρχει
πολυώνυμο $f(x)$ τέτοιο, ώστε $A(x) \cdot B(x) = (x-\rho)^2 f(x)$, αν και μόνο αν $A(\rho) = A'(\rho) = 0$.
β) Αν ν είναι ακέραιος μεγαλύτερος ή ίσος του 1 , να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών
 κ, λ για τις οποίες το πολυώνυμο $Q(x) = x^\nu (\nu x^3 + \kappa x^2 + \lambda x + 8)$ έχει παράγοντα το $(x-2)^2$.

(1^η Δέσμη 1994)

10. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)3^{00}$ βαθμού, με ρίζες ρ_1, ρ_2, ρ_3 . Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{1}{x - \rho_1} + \frac{1}{x - \rho_2} + \frac{1}{x - \rho_3}.$$

11. Να βρείτε τη ν-οστή παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = x \cdot e^x$.

12. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις $f(x) = -2x^2$ και $g(x) = e^x$ έχουν μία ακριβώς κοινή εφαπτομένη.

13. Να βρείτε, αν υπάρχει, την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\varphi(x) = x \cdot \sqrt{x}$, $x \geq 0$ στο σημείο $O(0,0)$.

14. Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση f ισχύει η σχέση $f(2+x) - f(2-x) = -2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο $A(2, f(2))$ είναι κάθετη στην ευθεία $y = x$.

15. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση τέτοια ώστε να ισχύει :

$$2 \cdot f^3(x) + 6 \cdot f(x) = \frac{x^2}{5} + \frac{2}{3} \cdot x^3 + 3x - \eta \mu x.$$

- Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $O(0,0)$.

16. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση f , για την οποία ισχύει

$$f^3(x) - \alpha \cdot x \cdot f^2(x) - 3x^3 + 1 = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ με } \alpha \in \mathbb{R}.$$

- Να αποδείξετε ότι το σημείο $A(0, -1)$ ανήκει στη C_f .
- Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο A .
- Να βρείτε το α , ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο A να εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = x^2 + x$.

17. α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $4 \cdot x^2 \cdot \ln x = 1 + 4 \cdot x^2$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (e, e^2) .

β) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$, $x \in (e, e^2)$ και $\varphi(x) = -x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι υπάρχει μία τουλάχιστον κοινή εφαπτόμενη των δύο γραφικών παραστάσεων.

18. Να βρείτε την κοινή εφαπτομένη των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ και

$$\varphi(x) = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0.$$

19. Δίνεται η παραβολή $y = \frac{1}{2}x^2$. Να δείξετε ότι :
- Από κάθε σημείο $M(\alpha, \beta)$ με $2\beta < \alpha^2$ διέρχονται δύο ακριβώς εφαπτόμενες της παραβολής.
 - Αν το M ανήκει στην ευθεία με εξίσωση $y = -\frac{1}{2}$ τότε οι εφαπτόμενες της παραβολής που διέρχονται από το M είναι κάθετες.
20. Αν $\varphi(x) = \alpha \cdot \ln x + x$, $x > 0$, να δείξετε ότι υπάρχει $\alpha \in (1, e^2)$ τέτοιο, ώστε η ευθεία $(\varepsilon): y = 2x + 1$ να εφάπτεται της γραφικής παράστασης της φ .
21. Θεωρούμε συνάρτηση f συνεχή στο $x_0 \in \mathbb{R}$ και τέτοια ώστε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - 2x + 3}{x - x_0} = 0$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $(\varepsilon): y = 2x - 3$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$.
22. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \ln x + \alpha x + \beta & , x \geq 1 \\ x^2 + \beta x + 2 & , x < 1 \end{cases}$. Να προσδιορίσετε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε η συνάρτηση f να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.
23. Έστω f, g, h συναρτήσεις ορισμένες στο $\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν οι σχέσεις:
- f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 - h δύο φορές παραγωγίσιμη, $g(x) = f(x) \cdot h'(x)$ και
 - $[h(x)]^2 + [h'(x)]^2 = 1$.
- Αν $A(x_0, y_0)$ κοινό σημείο των C_f, C_g , να δείξετε ότι οι C_f, C_g έχουν στο A κοινή εφαπτομένη.
24. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f(x) - x \leq x^2 \leq f(x-1) + x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Να βρείτε τον τύπο της f .
 - Να δείξετε ότι από τα σημεία της ευθείας με εξίσωση $y = -\frac{1}{2}$ άγονται κάθετες εφαπτόμενες προς τη C_f .
25. α) Αν η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , ενώ η g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , να αποδείξετε ότι η $f - g$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .
- β) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $h(x) = \sqrt{x} - \sqrt{e^x + 1} - \eta \mu x$.
26. Ένας γεωργός προσθέτει x μονάδες λιπάσματος σε μία αγροτική καλλιέργεια και συλλέγει $g(x)$ μονάδες του παραγόμενου προϊόντος. Αν $g(x) = M_0 + M(1 - e^{-\mu x})$, $x \geq 0$, όπου M_0, M, μ είναι θετικές σταθερές, να εκφράσετε το ρυθμό μεταβολής του παραγόμενου προϊόντος ως συνάρτηση της $g(x)$. Ποια είναι η σημασία της σταθεράς M_0 ;

27. Υλικό σημείο M κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x}$. Αν η τετμημένη x του σημείου μεταβάλλεται με ρυθμό 4 cm/sec , να βρείτε, τη χρονική στιγμή t_0 που είναι $x = 4 \text{ cm}$, το ρυθμό μεταβολής:

- Της τεταγμένης y .
- Της γωνίας που σχηματίζεται από τη διανυσματική ακτίνα OM και τον ημιάξονα Ox .

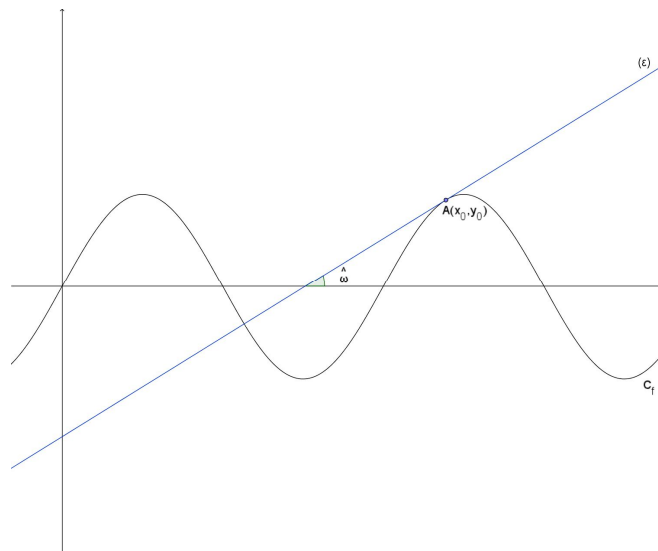
28. Να υπολογίσετε τα όρια :

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\varepsilon \varphi \frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{\ln x}} \quad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + x)^{\frac{1}{x}} \quad \text{iii) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{2} - \ln \frac{x^2 + 1}{x} \right)$$

29. Έστω f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(1) = 4$, $f'(1) = -2$, η οποία έχει συνεχή παράγωγο στο 1

Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(e^{x-1} + 1)f(x) - 5x^2 - 3}{\ln x}$.

30. Έστω η C_f της $f(x) = \eta \mu x$, $x \in \mathbb{R}$ και A τυχαίο σημείο αυτής. Αν (ε) η εφαπτόμενη της f στο σημείο A ποιες οι δυνατές τιμές της γωνίας $\hat{\omega}$ και γιατί; Δίνεται το σχήμα:



31. Θεωρούμε δύο συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες στο σημείο $x_0 = \alpha$ και $g(\alpha) \neq 0$, $g'(\alpha) \neq 0$.

Αν για τη συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ ισχύει $h'(\alpha) = 0$, να δείξετε ότι $h(\alpha) = \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$.

32. Αν φ είναι μία πολυωνυμική συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι για κάθε πραγματικό x , $(\varphi'(x))^2 = \varphi(x)$ και $\varphi'(4) = 0$, να βρείτε τον τύπο της φ και την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής της παράστασης η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία $(\varepsilon): y = -x + 1$.

33. Έστω $\varphi(x) = \sqrt[4]{x^6}$.

- Να τη μελετήσετε ως προς την παραγωγισιμότητα.
- Αν $g(x) = (\eta\mu x)^x$, $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, να εξηγήσετε γιατί δεν υπάρχει εφαπτόμενη της γραφικής της παράστασης παράλληλη στην ευθεία η οποία εφάπτεται της γραφικής παράστασης της φ στο $O(0,0)$.

34. α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $1+2x+3x^2+\dots+nx^{n-1}$.

β) Να υπολογίσετε το άθροισμα : $2 + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \frac{5}{16} + \dots + \frac{20}{2^{19}}$

35. Μία βιομηχανία κατασκευάζει ένα αυτοκίνητο το οποίο έχει κόστος 10.000 ευρώ το ένα και πωλείται προς 34.000 ευρώ το ένα. Ο αριθμός πωλήσεων P εξαρτάται από τα έξοδα x (σε χιλιάδες ευρώ) για διαφήμιση με τον τύπο $P(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$.

- Να βρείτε το κέρδος K της βιομηχανίας ως συνάρτηση του ποσού που δαπανάται για τη διαφήμιση.
- Να βρείτε το ανώτατο ποσό x που πρέπει να δαπανήσει η βιομηχανία αυτή, ώστε ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους να μην είναι αρνητικός.

