

ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ (Β' ΜΕΡΟΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1 – 53)

ΑΣΚΗΣΗ 1

Παρατηρείστε ότι πρέπει η f να είναι συνεχής στο 0 οπότε $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \beta = 4$,

να είναι παραγωγίσιμη στο 0 δηλαδή $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \in \mathbb{R}$ που καταλήγει $\alpha = 0$

και $f(-1) = f(1) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \gamma = 1$.

ΑΣΚΗΣΗ 2

i. Δεν είναι συνεχής ούτε στο 0 ούτε στο π διότι $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\eta \mu x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot \eta \mu x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\eta \mu(\pi - x)}{x - \pi} = -1$,

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} (x \cdot \eta \mu x) = 0$$

ii. Πληροί τις προϋποθέσεις του Θ. Rolle στο $[0, \pi]$ διότι είναι συνεχής σε αυτό, ανεξάρτητα από το ότι δεν είναι συνεχής στο 0 και στο π . (Θυμηθείτε τον ορισμό) Είναι παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$ και ισχύει $f(0) = f(\pi) = 0$

iii. Η εξίσωση $\frac{\varepsilon \varphi x}{x} = -1 \Leftrightarrow \dots \eta \mu x + x \cdot \sigma \upsilon \nu x = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0$ έχει λύση στο $(0, \pi)$ από την

εφαρμογή του θ. Rolle του ερωτήματος ii, η οποία προφανώς δεν είναι το $\frac{\pi}{2}$.

ΑΣΚΗΣΗ 3

i) Η F συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) ως... Επίσης $F(\alpha) = F(\beta)$ αφού $\alpha f(\beta) = \beta f(\alpha)$

ii) Θέλουμε να υπάρχει ξ στο (α, β) ώστε η (ε) : $y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$ να διέρχεται από το

$O(0,0) \Leftrightarrow \dots \xi f'(\xi) - f(\xi) = 0$. Όμως από το ερώτημα i υπάρχει ξ στο (α, β) ώστε

$$F'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \dots \xi f'(\xi) - f(\xi) = 0$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Θεώρημα Rolle για τη συνάρτηση $F(x) = \frac{\alpha}{5}x^5 + \frac{\beta}{4}x^4 + \frac{\gamma}{3}x^3 + \frac{\delta}{2}x^2 + \varepsilon x$ στο $[0, 1]$.

ΑΣΚΗΣΗ 5

Έστω η συνάρτηση $g(x) = f(x) - x^2 + x$, η οποία έχει δύο ρίζες, x_1, x_2 με $x_1 < x_2$. Εφαρμόζουμε το θεώρημα Rolle στο $[x_1, x_2]$ και προκύπτει ότι υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ ώστε $g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = 2\xi - 1$ (άτοπο).

ΑΣΚΗΣΗ 6

Από θεώρημα Bolzano στα $[1, 2]$, $[2, 3]$ υπάρχουν κ, λ ώστε $f(\kappa) = f(\lambda) = 0$. Μετά εφαρμόζουμε θεώρημα Rolle στο $[\kappa, \lambda]$.

ΑΣΚΗΣΗ 7

Έστω η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x \in [1, 2]$. Από θεώρημα Rolle προκύπτει ότι η εξίσωση

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x) \cdot x - f(x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow f'(x) \cdot x = f(x) \text{ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο } (1, 2).$$

Στη συνέχεια θεωρούμε ότι η $h(x) = f'(x) \cdot x - f(x)$ έχει δύο ρίζες, x_1, x_2 με $x_1 < x_2$. Εφαρμόζουμε το θεώρημα Rolle στο $[x_1, x_2]$ και προκύπτει ότι υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ ώστε $h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f''(\xi) = 0$ (άτοπο).

ΑΣΚΗΣΗ 8

i) Αν $\alpha = \beta$ τότε φανερά η ζητούμενη ισχύει σαν ισότητα .

$$\text{Αν } \alpha > \beta \text{ τότε } \frac{\alpha - \beta}{\sin^2 \beta} \leq \epsilon \phi \alpha - \epsilon \phi \beta \leq \frac{\alpha - \beta}{\sin^2 \alpha} \stackrel{\alpha - \beta > 0}{\Leftrightarrow} \frac{1}{\sin^2 \beta} \leq \frac{\epsilon \phi \alpha - \epsilon \phi \beta}{\alpha - \beta} \leq \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

Εφαρμόζοντας Θ.Μ.Τ. για την συνάρτηση $f(x) = \epsilon \phi x$ στο $[\beta, \alpha] \subset \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ καταλήγουμε ότι η

ζητούμενη ανισότητα ισοδύναμα γίνεται :

$$\frac{1}{\sin^2 \beta} \leq \frac{1}{\sin^2 \xi} \leq \frac{1}{\sin^2 \alpha} \stackrel{\text{συν} x > 0 \text{ για } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)}{\Leftrightarrow} \sin \beta \geq \sin \xi \geq \sin \alpha \stackrel{\text{συν} x \nearrow \text{ στο } \left(0, \frac{\pi}{2}\right)}{\Leftrightarrow} \beta \leq \xi \leq \alpha \text{ η οποία προφανώς ισχύει .}$$

ii) Είναι $\ln \left(\frac{\pi^\pi}{3^3}\right) \geq 2\pi - 6 \Leftrightarrow \frac{\pi \ln \pi - 3 \ln 3}{\pi - 3} \geq 2$ οπότε εφαρμόζοντας Θ.Μ.Τ. για την συνάρτηση

$f(x) = x \ln x$ στο $[3, \pi]$ καταλήγουμε ότι η ζητούμενη ανισότητα ισοδύναμα γίνεται :

$$\ln \xi + 1 \geq 2 \Leftrightarrow \ln \xi \geq 1 \Leftrightarrow \xi \geq e \text{ η οποία προφανώς ισχύει αφού } \xi \in (3, \pi) .$$

iii) Είναι $1 - \frac{\alpha}{\beta} < \ln \beta - \ln \alpha < \frac{\beta}{\alpha} - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\beta} < \frac{\ln \beta - \ln \alpha}{\beta - \alpha} < \frac{1}{\alpha}$, οπότε εφαρμόζοντας Θ.Μ.Τ. για την

συνάρτηση $f(x) = \ln x$ στο $[\alpha, \beta]$ καταλήγουμε ότι η ζητούμενη ανισότητα γίνεται :

$$\frac{1}{\beta} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{\alpha} \stackrel{\text{μέλη θετικά}}{\Leftrightarrow} \beta > \xi > \alpha \text{ η οποία προφανώς ισχύει .}$$

iv) Είναι $|\sin \beta - \sin \alpha| \leq |\beta - \alpha| \Leftrightarrow \left| \frac{\sin \beta - \sin \alpha}{\beta - \alpha} \right| \leq 1$ οπότε εφαρμόζοντας Θ.Μ.Τ. για την συνάρτηση

$f(x) = \sin x$ στο $[\alpha, \beta]$ καταλήγουμε ότι η ζητούμενη ανισότητα γίνεται :

$$|-\eta \mu \xi| \leq 1 \Leftrightarrow |\eta \mu \xi| \leq 1 \text{ η οποία προφανώς ισχύει.}$$

ΑΣΚΗΣΗ 9

i) Θεώρημα Bolzano για τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$ στο $[\alpha, \beta]$.

ii) Θεώρημα μέσης τιμής για την συνάρτηση f στα διαστήματα $[\alpha, \gamma]$, $[\gamma, \beta]$, παρατηρώντας ότι

$$f(\gamma) = \gamma .$$

ΑΣΚΗΣΗ 10

Εφαρμόζοντας Θ.Μ.Τ στο $[0, 3]$ υπάρχει κ στο $(0, 3)$ ώστε $f'(\kappa) = -\frac{1}{3}$. Μετά εφαρμόζουμε θεώρημα Rolle στην f' .

ΑΣΚΗΣΗ 11

Εφαρμόζοντας διαδοχικά Θ.Μ.Τ στα $[5, 7], [7, 12], [12, 14]$ υπάρχουν κ, λ, μ ώστε $f'(\kappa) = f'(\lambda) = f'(\mu) = 2$. Μετά εφαρμόζουμε το θεώρημα Rolle στην f' στα διαστήματα $[\kappa, \lambda], [\lambda, \mu]$ και προκύπτει το ζητούμενο.

ΑΣΚΗΣΗ 12

Για κάθε πραγματικό x θεωρούμε την συνάρτηση $f(t)$ στα διαστήματα $[x-1, x]$ και $[x, x+1]$. Ισχύουν οι προϋποθέσεις Θ.Μ.Τ. άρα υπάρχουν ξ_1, ξ_2 με $\xi_1 < \xi_2$ και $f'(\xi_1) = f(x) - f(x-1)$, $f'(\xi_2) = f(x+1) - f(x)$.

$$\text{Όμως } \xi_1 < \xi_2 \stackrel{f' \text{ '}}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow \dots f(x) < \frac{f(x-1) + f(x+1)}{2}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 13

i. Θεώρημα Rolle για την συνάρτηση $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3$ στο $[1, 2]$.

ii. Θεώρημα Bolzano για την συνάρτηση $t(x) = f'(x) - 4x$ στο $[1, x_0] \subset (1, 2)$, όπου x_0 αυτό του ερωτήματος (i).

ΑΣΚΗΣΗ 14

α) Είναι $f'(x) = \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow f'(x) = (-\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x) \stackrel{f(0)=3}{\Leftrightarrow} \dots f(x) = -\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x + 3$.

β) Είναι $f''(x) = 6x + 2 \Leftrightarrow f''(x) = (3x^2 + 2x) \stackrel{f'(0)=1}{\Leftrightarrow} \dots f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f'(x) = (x^3 + x^2 + x) \stackrel{f(1)=-3}{\Leftrightarrow} \dots f(x) = x^3 + x^2 + x - 6.$$

γ) Είναι $f'(x) = \frac{2x - x^2}{e^x} = \frac{2x \cdot e^x - x^2 \cdot e^x}{e^{2x}} = \left(\frac{x^2}{e^x}\right) \stackrel{f(0)=3}{\Leftrightarrow} \dots f(x) = \frac{x^2}{e^x} + 3$.

ΑΣΚΗΣΗ 15

α) Είναι $f'(x) + f(x) = 2 \Leftrightarrow f'(x) \cdot e^x + e^x \cdot f(x) = 2e^x \Leftrightarrow (f(x) \cdot e^x)' = (2e^x)' \stackrel{f(0)=1}{\Leftrightarrow} \dots f(x) = 2 - e^{-x}$.

β) Είναι $f'(x) + 2f(x) = 3 \Leftrightarrow f'(x) + (2x)' \cdot f(x) = 3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f'(x) \cdot e^{2x} + e^{2x} \cdot (2x)' \cdot f(x) = 3e^{2x} \Leftrightarrow (f(x) \cdot e^{2x})' = \left(\frac{3}{2}e^{2x}\right)' \stackrel{f(0)=0}{\Leftrightarrow} \dots f(x) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}e^{-2x}$$

γ) Είναι $2f'(x) - 3f(x) = 2 \Leftrightarrow f'(x) + \left(-\frac{3}{2}x\right)' \cdot f(x) = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f'(x) \cdot e^{-\frac{3}{2}x} + e^{-\frac{3}{2}x} \cdot \left(-\frac{3}{2}x\right)' \cdot f(x) = e^{-\frac{3}{2}x} \left(f(x) \cdot e^{-\frac{3}{2}x}\right)' = \left(-\frac{2}{3}e^{-\frac{3}{2}x}\right)' \stackrel{f(0)=0}{\Leftrightarrow} \dots f(x) = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}x}.$$

δ) Είναι $f'(x) - 2x \cdot e^{-f(x)} = 0 \Leftrightarrow f'(x) \cdot e^{f(x)} = 2x \Leftrightarrow (e^{f(x)})' = (x^2)' \stackrel{f(1)=1}{\Leftrightarrow} \dots f(x) = \ln(x^2 + e - 1)$.

ΑΣΚΗΣΗ 16

Είναι για κάθε $x \neq 0$ $f'(x) = 3x^2 \dots f(x) = \begin{cases} x^3 + c_1, & x < 0 \\ x^3 + c_2, & x > 0 \end{cases}$ όμως αφού η f είναι περιττή και

$f(1) = 1$ θα είναι $f(-1) = -1 \dots \dots \dots$ άρα $c_1 = c_2 = 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 17

i) Προφανές από τις $f'(x) = g(x)$ και $g'(x) = -f(x)$.

ii) Προφανές από τις $f'(x) = g(x)$ και $g'(x) = -f(x)$.

iii) Εύκολα προκύπτει ότι $h'(x) = 2f(x)g(x) - 2f(x)g(x) = 0$

iv) Από θεώρημα Rolle για την f στο $[a, \beta]$ προκύπτει ότι υπάρχει ρίζα της $f'(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$.

Επιπλέον, παρατηρείστε ότι $f(x) \neq 0 \Leftrightarrow g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, \beta)$ και η g' είναι συνεχής άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο οπότε η g είναι γνησίως μονότονη, άρα η ρίζα είναι μοναδική.

ΑΣΚΗΣΗ 18

Παρατηρείστε ότι $x \cdot f'(x) + f(x) = e^x \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow f(x) = \frac{e^x + c}{x}$ για κάθε $x \in (1, 10)$ και με εφαρμογή για

$$x = 2 \text{ προκύπτει } c = e^2, \text{ επομένως } f(x) = \begin{cases} c_1, & x = 1 \\ \frac{e^x + e^2}{x}, & x \in (1, 10) \\ c_2, & x = 10 \end{cases}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 19

α) Για $x = y = 1$, προκύπτει $f(1) = 0$.

Για κάθε $x_0 \in (0, +\infty)$ ισχύει

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{\frac{x}{x_0} = h}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ \frac{x}{x_0} = h}} \frac{f(x_0 \cdot h) - f(x_0)}{x_0 \cdot h - x_0} = \dots = f'(1) + \frac{f(x_0)}{x_0} = 1 + \frac{f(x_0)}{x_0}.$$

Άρα $f'(x) = 1 + \frac{f(x)}{x}$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

β) Πολλαπλασιάζω την προηγούμενη ισότητα με $\frac{1}{x}$ και γίνεται

$$f'(x) \cdot \frac{1}{x} - f(x) \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x} \right)' = (\ln x)' \stackrel{f(1)=0}{\Leftrightarrow} \dots f(x) = x \ln x.$$

ΑΣΚΗΣΗ 20

- Η f είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.
- $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x, & x \leq 0 \text{ ή } x \geq 4 \\ 3x^2 - 4x, & 0 < x < 4 \end{cases}$ και $f'(x) = \begin{cases} 2x + 4, & x < 0 \text{ ή } x > 4 \\ 6x - 4, & 0 < x < 4 \end{cases}$ (Λόγω συνέχειας δε μας ενδιαφέρει η παραγωγισιμότητα στα σημεία 0 και 4).
- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ ή } x = \frac{2}{3}$.
- Πίνακας :

x	$-\infty$	-2	0	$\frac{2}{3}$	4	$+\infty$
$f'(x)$	-	+	-	+	+	+
$f(x)$						

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα $[-2, 0]$ και $\left[\frac{2}{3}, +\infty \right)$ και γνησίως φθίνουσα στα $(-\infty, -2]$ και $\left[0, \frac{2}{3} \right]$.

ΑΣΚΗΣΗ 21

α) Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

$f'(x) = a^x \cdot \ln a - 1 < 0$ αφού $0 < a < 1 \Leftrightarrow \ln a < 0$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β) $a^{\lambda^2 - 4} - a^{\lambda - 2} = \lambda^2 - \lambda - 2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow f(\lambda^2 - 4) = f(\lambda - 2) \stackrel{f:1-1}{\Leftrightarrow} \dots \lambda = 2 \text{ ή } \lambda = -1$

ΑΣΚΗΣΗ 22

Είναι $f'(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x \cdot \ln \frac{3}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^x \cdot \ln \frac{4}{5} < 0 \dots$ άρα η f γνησίως φθίνουσα. Είναι

$$(3^{x-1} + 4^{x-1}) \cdot 5^{1-2x} < (3^{1-2x} + 4^{1-2x}) \cdot 5^{x-1} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{x-1} + \left(\frac{4}{5}\right)^{x-1} < \left(\frac{3}{5}\right)^{1-2x} + \left(\frac{4}{5}\right)^{1-2x} \Leftrightarrow x-1 > 1-2x \dots$$

ΑΣΚΗΣΗ 23

i) Για την $f(x) = \frac{\ln(x-1)}{\ln x}$ είναι $f'(x) = \dots = \frac{x \ln x - (x-1) \ln(x-1)}{x(x-1) \ln^2 x}$ με $x \in (2, +\infty)$.

Φανερά το πρόσημο της παραγώγου εξαρτάται από τον αριθμητή, οπότε αν θεωρήσουμε

$$g(x) = x \ln x - (x-1) \ln(x-1), \quad x \in [2, +\infty) \quad \text{τότε} \quad g'(x) = \ln x - \ln(x-1) > 0 \quad \text{για κάθε} \quad x \in (2, +\infty)$$

συνεπώς η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$ άρα $g(x) \geq g(2) \Leftrightarrow x \ln x - (x-1) \ln(x-1) > 2 \ln 2 > 0$

οπότε $f'(x) > 0$ συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(2, +\infty)$.

ii) παρατηρείστε ότι

$$(\alpha-1)^{\ln \beta} < (\beta-1)^{\ln \alpha} \Leftrightarrow \ln((\alpha-1)^{\ln \beta}) < \ln((\beta-1)^{\ln \alpha}) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow f(\alpha) < f(\beta) \Leftrightarrow \alpha < \beta$$

$\ln \alpha, \ln \beta$ θετικά

η οποία προφανώς ισχύει.

ΑΣΚΗΣΗ 24

α) Για τη συνάρτηση $f(x) = x^3 + x + 3$ διαπιστώνουμε ότι $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$

άρα $\left. \begin{array}{l} f \text{ συνεχής στο } \mathbb{R} \\ f \nearrow \text{ στο } \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = \mathbb{R}$ οπότε $0 \in f(\mathbb{R})$ και η f είναι γνησίως

αύξουσα επομένως η εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + x + 3 = 0$ έχει μία ακριβώς πραγματική ρίζα.

β) Για τη συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x - 4\sqrt{2}$ διαπιστώνουμε ότι $f'(x) = 3x^2 - 6$, οπότε

	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
f		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

συνεπώς

- $f\left((-\infty, -\sqrt{2}]\right) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(-\sqrt{2})\right) = (-\infty, 0]$ άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει στο $(-\infty, -\sqrt{2}]$ μία ακριβώς λύση την $x = -\sqrt{2}$.
- $f\left([-\sqrt{2}, \sqrt{2}]\right) = [f(\sqrt{2}), f(-\sqrt{2})] = [-8\sqrt{2}, 0]$ άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει και στο $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ μία ακριβώς λύση την $x = -\sqrt{2}$.
- $f\left([\sqrt{2}, +\infty)\right) = [f(\sqrt{2}), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)) = [-8\sqrt{2}, +\infty)$ άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο $(\sqrt{2}, +\infty)$.

Τελικά, η εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 6x = 4\sqrt{2}$ έχει δύο ακριβώς πραγματικές ρίζες.

γ) Για τη συνάρτηση $f(x) = x^3 - 12x + 10$ διαπιστώνουμε ότι $f'(x) = 3x^2 - 12$, οπότε

	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f					

συνεπώς

- $f((-\infty, -2]) = \left[\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(-2) \right] = (-\infty, 26]$ άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει στο $(-\infty, -2)$ μία ακριβώς λύση.
- $f([-2, 2]) = [f(2), f(-2)] = [-6, 26]$ άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει στο $(-2, 2)$ μία ακριβώς λύση.
- $f([2, +\infty)) = \left[f(2), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [-6, +\infty)$ άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία ακριβώς λύση στο $(2, +\infty)$.

Τελικά, η εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + 10 = 12x$ έχει τρεις ακριβώς πραγματικές ρίζες.

δ) Για την $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x - 1$ διαπιστώνουμε ότι $f'(x) = \dots = (x-1)(x^2-4)$, οπότε

	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$	
$x-1$	-		- ○ +	○ +		
x^2-4	+	○ -		- ○ +		
$f'(x)$	-	○ +	○ -	○ +		
f						

συνεπώς

- $f((-\infty, -2]) = \left[f(-2), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = \left[-\frac{31}{3}, +\infty \right)$ άρα η $f(x) = 0$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο $(-\infty, -2)$
- $f([-2, 1]) = [f(-2), f(1)] = \left[-\frac{31}{3}, \frac{11}{12} \right]$ άρα η $f(x) = 0$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο $(-2, 1)$.
- $f([1, 2]) = [f(2), f(1)] = \left[\frac{1}{3}, \frac{11}{12} \right]$ άρα η $f(x) = 0$ δεν έχει ρίζα στο $[1, 2]$.
- $f([2, +\infty)) = \left[f(2), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = \left[\frac{1}{3}, +\infty \right)$ άρα η $f(x) = 0$ δεν έχει ρίζα στο $[2, +\infty)$.

Τελικά, η εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x = 1$ έχει δύο ακριβώς πραγματικές ρίζες.

ε) Για την $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 24x - \frac{1}{2}$ διαπιστώνουμε ότι $f'(x) = \dots = 12(x-2)(x^2+1)$, οπότε

	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f		$\searrow$	$\nearrow$

συνεπώς

- $f((-\infty, 2]) = \left[f(2), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = \left[-\frac{81}{2}, +\infty \right)$ άρα η $f(x) = 0$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο $(-\infty, 2)$.
- $f([2, +\infty)) = \left[f(2), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = \left[-\frac{81}{2}, +\infty \right)$ άρα η $f(x) = 0$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο $(2, +\infty)$.

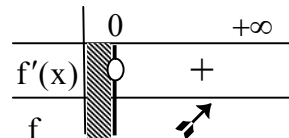
Τελικά, η εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 24x = \frac{1}{2}$ έχει δύο ακριβώς πραγματικές ρίζες.

ΑΣΚΗΣΗ 25

α) Είναι $3^x + 4^x = 7^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{7}\right)^x + \left(\frac{4}{7}\right)^x = 1$ για την οποία παρατηρούμε ότι έχει μία προφανή λύση $x = 1$

η οποία είναι μοναδική γιατί η $f(x) = \left(\frac{3}{7}\right)^x + \left(\frac{4}{7}\right)^x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ άρα και 1-1 .

β) Είναι $e^{|x|} - e^2 = |x| - 2 \Leftrightarrow e^y - y = e^2 - 2$ για την οποία παρατηρούμε ότι έχει μία προφανή λύση $y = 2$. Για τη συνάρτηση $f(y) = e^y - y$, $y \geq 0$ διαπιστώνουμε ότι $f'(y) = e^y - 1 > 0$ στο $(0, +\infty)$ συνεπώς είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ άρα η $y = 2$ είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $f(y) = e^2 - 2$.



Τελικά, για $y = 2$ είναι $|x| = 2 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

γ) Για τη συνάρτηση $f(x) = x^2 + x + \ln x - 2$ διαπιστώνουμε ότι $f'(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x} > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$, συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα άρα και 1-1 στο $(0, +\infty)$.

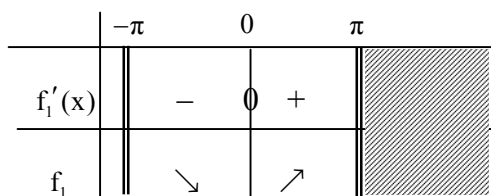
Επίσης προφανής λύση, της εξίσωσης $f(x) = 0$, είναι η $x = 1$, η οποία με βάση τα προηγούμενα είναι και μοναδική.

ΑΣΚΗΣΗ 26

Υπενθύμιση: Κρίσιμα σημεία είναι τα εσωτερικά σημεία διαστήματος στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή μηδενίζεται η παράγωγος της.

α) Για την $f_1(x) = x^2 + 2\sin x$ είναι $f_1'(x) = \dots = 2(x - \eta\mu x)$

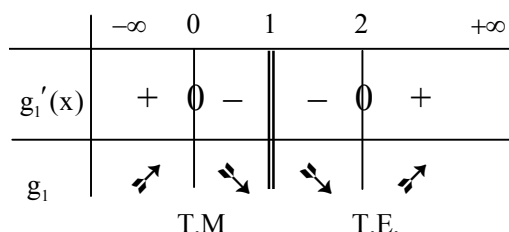
Θυμήσου ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $|\eta\mu x| \leq |x|$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$, οπότε :



Ο.Ε.

δηλαδή η f_1 είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\pi, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, \pi)$ και παρουσιάζει στο 0 ελάχιστο το $f_1(0) = 2$. Προφανώς μοναδικό κρίσιμο σημείο είναι το 0.

β) Για την $g_1(x) = \frac{x^2}{x-1}$ είναι $g_1'(x) = \dots = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$. Επιπλέον $g_1'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 2$, οπότε



η g_1 είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0]$, $[2, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $[0, 1)$, $(1, 2]$.

Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο 0 το $g_1(0) = 0$ και τοπικό ελάχιστο στο 2 το $g_1(2) = 4$. Προφανώς τα 0, 2 είναι τα

μοναδικά κρίσιμα σημεία.

γ) Για την $f_2(x) = x \ln x - \frac{x^2}{2}$ είναι $f_2'(x) = \ln x + 1 - x$

Για την $f_2'(x) = \ln x + 1 - x$ είναι $f_2''(x) = \frac{1-x}{x}$ συνεπώς

	0	1	$+\infty$	
$f_2''(x)$		+	0	-
f_2'				

O.M.

Δηλαδή η $f_2'(x) = \ln x + 1 - x$ παρουσιάζει μέγιστο στο 1 το

$f_2'(1) = 0$ άρα $f_2'(x) \leq 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

(με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 1$), οπότε η συνάρτηση

$f_2(x) = x \ln x - \frac{x^2}{2}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ και

φανερά δεν παρουσιάζει ακρότατα . Κρίσιμο σημείο μόνο το 1.

δ) Για την $g_2(x) = xe^{-\frac{1}{x^2}}$ είναι $g_2'(x) = \dots = e^{-\frac{1}{x^2}} \left(1 + \frac{2}{x^2}\right) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

άρα η $g_2(x) = xe^{-\frac{1}{x^2}}$ είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ άρα δεν παρουσιάζει και κρίσιμα σημεία.

ε) Για την $g_3(x) = x + 2\sqrt{2-x}$ είναι $g_3'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2-x}}$ με $x \in (-\infty, 2)$. Επιπλέον

$g_3'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{\sqrt{2-x}} \geq 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x \leq 1$. συνεπώς :

	$-\infty$	1	2
$g_3'(x)$	+	0	-
g_3			

δηλαδή η $g_3(x) = x + 2\sqrt{2-x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$, γνησίως φθίνουσα στο $[1, 2]$, παρουσιάζει στο 1 μέγιστο το $g_3(1) = 3$ και τοπικό ελάχιστο στο 2 το $g_3(2) = 2$. Προφανώς μοναδικό κρίσιμο σημείο το 1 . Δεν εξετάζουμε καν για παραγωγισιμότητα στο 2 διότι είναι άκρο διαστήματος.

ΑΣΚΗΣΗ 27

ι. Για κάθε $x \in [-\ln 2, 0]$ είναι $f'(x) = e^x - 1$

Για κάθε $x \in (0, 1)$ είναι $f'(x) = 0$

Για κάθε $x \in (1, 2]$ είναι $f'(x) = 3x(x-4)$

Προφανώς η f συνεχής στα 0, 1.

Πίνακας μεταβολών

	$-\ln 2$	0	1	2
$f'(x)$		-	0	-
f				

$f(-\ln 2) = \frac{1}{2} + \ln 2$ $f(0) = 1$ $f(1) = 1$ $f(2) = -10$

Λόγω λοιπόν συνέχειας f στο $[-\ln 2, 0]$, σταθερή στο $(0, 1)$ και στο $[1, 2]$.

Για κάθε $x \in (0,1)$ η f παρουσιάζει και τοπικό μέγιστο και τοπικό ελάχιστο.

Ολικό μέγιστο είναι το $f(-\ln 2) = \frac{1}{2} + \ln 2$.

Ολικό ελάχιστο είναι το $f(2) = -10$.

ii. Είναι $f'(x) = e^x - 1$ άρα η f παρουσιάζει στο 0 ολικό ελάχιστο το 1. Είναι $g'(x) = e^x - x = f(x)$.

Άρα $g'(x) \geq 1 > 0$ οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα.

iii. Είναι $g(x) = \begin{cases} \frac{-x-1}{\sqrt{x^2+1}}, & x < -1 \\ \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}, & x \geq -1 \end{cases}$

... g συνεχής στο -1.

Για κάθε $x > -1$ είναι $g'(x) = \dots = \frac{1-x}{\sqrt{x^2+1} \cdot (x^2+1)}$

Για κάθε $x < -1$ είναι $g'(x) = \dots = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1} \cdot (x^2+1)} < 0$

Πίνακας μεταβολών

	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	;	0	-
g				
		T.EΛ.	T.M.	
		$f(-1) = 0$	$f(1) = \sqrt{2}$	

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} = \dots = 1$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x-1}{\sqrt{x^2+1}} = \dots = 1$.

Άρα ολικό μέγιστο είναι το $\sqrt{2}$, ενώ ολικό ελάχιστο είναι το 0.

ΑΣΚΗΣΗ 28

α) Η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική και $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$.

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	+
$f(x)$				

Έχει τοπικό μέγιστο το $f(-1) = 5a^2 + 7$ και τοπικό ελάχιστο το $f(2) = 5a^2 - 20 = 5(a-2)(a+2)$.

β) i) Αν $a \in (-2, 2)$, τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς 3 ρίζες, μία σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -1)$, $(-1, 2)$, $(2, +\infty)$, διότι το σύνολο τιμών της f σε καθένα απ' αυτά περιέχει το μηδέν και η f είναι γνησίως μονότονη σε καθένα απ' αυτά.

ii) Αν $a = 2$ ή $a = -2$ τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει διπλή ρίζα το δύο και μία ρίζα στο $(-\infty, -1)$.

iii) Αν $a \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μόνο μία ρίζα στο $(-\infty, -1)$.

ΑΣΚΗΣΗ 29

α) Η f είναι συνεχής στο $[-1,5]$ και $f'(x) = \begin{cases} 2x-4, & -1 \leq x < 0 \text{ ή } 4 < x \leq 5 \\ -2x+4, & 0 < x < 4 \end{cases}$.

Για τη μονοτονία της f έχουμε τον παρακάτω πίνακα :

x	-1	0	2	4	5
$f'(x)$	-	+	-	+	
$f(x)$	↘	↗	↘	↗	

Τα σύνολα τιμών της f στα διαστήματα $[-1,0]$, $[0,2]$, $[2,4]$, $[4,5]$ είναι αντίστοιχα $[0,5]$, $[0,4]$, $[0,4]$, $[0,5]$. Η ένωση αυτών των διαστημάτων, δηλαδή το $[0,5]$, είναι το σύνολο τιμών της f .

β) Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f'(x) = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}$.

Για τη μονοτονία της f έχουμε τον παρακάτω πίνακα :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	+	-	
$f(x)$	↘	↗	↘	

Τα σύνολα τιμών της f στα διαστήματα $(-\infty, -1]$, $[-1,1]$, $[1,+\infty)$ είναι αντίστοιχα $[-1,0]$, $[-1,1]$, $(0,1]$. Η ένωση αυτών των διαστημάτων, δηλαδή το $[-1,1]$, είναι το σύνολο τιμών της f .

ΑΣΚΗΣΗ 30

Είναι $g'(x) = \dots = \frac{f'(x)(1-f(x))(1+f(x))}{(1+f^2(x))^2}$ με $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in [0,3]$ οπότε το πρόσημο της

παραγώγου εξαρτάται από το πρόσημο του γινομένου $(1-f(x))(1+f(x))$. Παρατηρείστε ότι

$1-f(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq f(2) \stackrel{f'(x)>0 \text{ άρα } f \nearrow}{\Leftrightarrow} x \leq 2$ και ανάλογα
 $1+f(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq f(1) \stackrel{f'(x)>0 \text{ άρα } f \nearrow}{\Leftrightarrow} x \geq 1$, συνεπώς

	0	1	2	3
$1-f(x)$	+	+	0	-
$1+f(x)$	-	0	+	+
Γινόμενο	-	0	+	-

άρα για τη συνάρτηση g έχουμε :

	0	1	2	3
$g'(x)$	-	0	+	-
g	↘	↗	↘	
	T.M.	T.E.	T.M.	T.E.

Φανερά το μέγιστο θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα $g(0) = \frac{f(0)}{1+f^2(0)}$ και $g(2) = \frac{1}{2}$, ενώ

το ελάχιστο θα είναι το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα $g(1) = -\frac{1}{2}$ και $g(3) = \frac{f(3)}{1+f^2(3)}$.

Παρατηρείστε ότι $f(0) < f(1) = -1$ άρα $f(0) < 0$ οπότε $g(0) < 0 < g(2) = \frac{1}{2}$ και ανάλογα

$f(3) > f(2) = \frac{1}{2}$ άρα $f(3) > 0$ οπότε $g(3) > 0 > g(1) = -\frac{1}{2}$. Έτσι $g([0,3]) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

ΑΣΚΗΣΗ 31

- i. α) Είναι $f(1) = 0$ και $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$ άρα μοναδική ρίζα ο 1. Προφανώς λόγω μονοτονίας θα ισχύει ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x > 1$ ενώ $f(x) < 0$ για κάθε $0 < x < 1$. Το σύνολο τιμών θα είναι $(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)) = \dots \mathbb{R}$
 β) $x = e^{\lambda+1-x} \Leftrightarrow \ln x = \lambda + 1 - x \Leftrightarrow \dots f(x) = \lambda$. Από το προηγούμενο ερώτημα η εξίσωση αυτή έχει μοναδική ρίζα για κάθε πραγματικό λ .
- ii. α) Έστω $h(x) = x^2 + 2x \ln x - 4x + 3, x > 0$. Είναι $h'(x) = 2x + 2 \ln x + 2 - 4 = 2f(x)$ Από το πρώτο ερώτημα προκύπτει λόγω ρίζας και μονοτονίας της f ότι η h παρουσιάζει στο 1 ολικό ελάχιστο 0 άρα για κάθε $x > 0 \Leftrightarrow h(x) \geq 0$
- iii. Αφού η g είναι παραγωγίσιμη σε ανοικτό διάστημα αρκεί να αποδείξουμε ότι $g'(x) \neq 0$. Είναι $(e^{g(x)} + g(x))' = (\frac{x^3}{3} + x^2 \ln x - \frac{5}{2}x^2 + 4x + c)' \Rightarrow \dots g'(x)[e^{g(x)} + 1] = x^2 + 2x \ln x - 4x + 4 = h(x) + 1 > 0$ για κάθε $x > 0$ αφού $h(x) \geq 0$. Άρα είναι και $g'(x) > 0$ οπότε η g δεν έχει κρίσιμα σημεία και είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$. Είναι $g(x^2 + g(x)) > g(x^2 + g(x^2)) \Leftrightarrow x^2 + g(x) > x^2 + g(x^2) \Leftrightarrow x > x^2 \dots x \in (0, 1)$.

ΑΣΚΗΣΗ 32

- i. Είναι $f'(x) = ax^{a-1}e^{2a-x} - x^ae^{2a-x} = x^{a-1}e^{2a-x}(a-x)$.

Πίνακας μεταβολών

	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
f		↗	↘

O.M.
 $f(\alpha) = \alpha^ae^a = e^{a \ln \alpha + a}$

- ii. Θεωρούμε την $h(x) = e^{x \ln x + x}$, με $x > 0$.
 Είναι $h'(x) = \dots = e^{x \ln x + x}(\ln x + 2)$, $x > 0$.

Πίνακας μεταβολών

	0	e^{-2}	$+\infty$
$h'(x)$		-	+
h		↘	↗

O.E.

Άρα για $a = e^{-2}$ έχουμε ολικό ελάχιστο.

ΑΣΚΗΣΗ 33

- α. Αν η f είχε ακρότατο στο $x_0 \in \mathbb{R}$ τότε από το Θ. Fermat θα ήταν $f'(x_0) = 0$.
 Από την $f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1$ έπεται

$$(f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x))' = (x^3 - 2x^2 + 6x - 1)' \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow f'(x)(3f^2(x) + 2\beta f(x) + \gamma) = 3x^2 - 4x + 6$$

και για $x = x_0$: $f'(x_0)(3f^2(x_0) + 2\beta f(x_0) + \gamma) = 3x_0^2 - 4x_0 + 6 \stackrel{f'(x_0)=0}{\Leftrightarrow} 3x_0^2 - 4x_0 + 6 = 0$, ΑΤΟΠΟ
γιατί $\Delta = -56 < 0$.

β. Από το προηγούμενο ερώτημα είναι $f'(x)(3f^2(x) + 2\beta f(x) + \gamma) = 3x^2 - 4x + 6$ (1)

Θεωρώντας το $3f^2(x) + 2\beta f(x) + \gamma$ ως τριώνυμο ως προς $f(x)$ έχουμε:

$$\Delta = (2\beta)^2 - 12\gamma = 4\beta^2 - 12\gamma = 4(\beta^2 - 3\gamma) < 0 \text{ αφού από την υπόθεση είναι } \beta^2 < 3\gamma$$

συνεπώς θα είναι $3f^2(x) + 2\beta f(x) + \gamma > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $3x^2 - 4x + 6 > 0$ (έχει $\Delta = -56 < 0$)

οπότε $f'(x) = \frac{3x^2 - 4x + 6}{3f^2(x) + 2\beta f(x) + \gamma} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

$$\gamma. f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1 \Leftrightarrow f(x)(f^2(x) + \beta f(x) + \gamma) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1$$

Θεωρώντας το $f^2(x) + \beta f(x) + \gamma$ ως τριώνυμο ως προς $f(x)$ έχουμε $\Delta = \beta^2 - 4\gamma < 0$ γιατί

$$\gamma > \frac{\beta^2}{3} \Rightarrow \gamma > 0 \text{ και } \beta^2 < 3\gamma \Leftrightarrow \beta^2 - 4\gamma < -\gamma \Leftrightarrow \beta^2 - 4\gamma < 0$$

επομένως $f^2(x) + \beta f(x) + \gamma > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Έτσι } f(x)(f^2(x) + \beta f(x) + \gamma) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1 \Rightarrow \begin{cases} f(0)\left(\underbrace{f^2(0) + \beta f(0) + \gamma}_{\text{θετικό}}\right) = -1 \\ f(1)\left(\underbrace{f^2(1) + \beta f(1) + \gamma}_{\text{θετικό}}\right) = 1 - 2 + 6 - 1 = 4 \end{cases}$$

οπότε εφαρμόζοντας Θ. Bolzano για την f στο $[0, 1]$...

ΑΣΚΗΣΗ 34

Θεωρούμε την $f(x) = \eta\mu x - x \cdot \sigma\upsilon\nu x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Αποδεικνύεται ότι είναι γνησίως αύξουσα και $f(0) = 0$.

Άρα η ανίσωση $\eta\mu x > x \cdot \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(0) \stackrel{f \text{ γν. αυξ.}}{\Leftrightarrow} 0 < x < \frac{\pi}{2}$.

ΑΣΚΗΣΗ 35

Για τις συναρτήσεις $f(x) = \eta\mu x - 2x$, $x \geq 0$ και $g(x) = x - \frac{x^3}{3} - \eta\mu x$, $x \geq 0$ είναι

- $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x - 2 < 0$ για κάθε $x \geq 0$ αφού $-1 \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1$, συνεπώς η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$ άρα $x > 0 \Leftrightarrow f(x) < f(0) \Leftrightarrow \eta\mu x - 2x < 0 \Leftrightarrow \eta\mu x < 2x$.

- $g'(x) = 1 - x^2 - \sigma\upsilon\nu x$ και ακόμα $g''(x) = -2x + \eta\mu x$.

Έχει αποδειχθεί ότι $\eta\mu x < 2x \Leftrightarrow \eta\mu x - 2x < 0$ για κάθε $x > 0$ δηλαδή $g''(x) < 0$ άρα η $g'(x) = 1 - x^2 - \sigma\upsilon\nu x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$ οπότε

$x > 0 \Leftrightarrow g'(x) < g'(0) \Leftrightarrow g'(x) < 0$ άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$ επομένως

$$x > 0 \Leftrightarrow g(x) < g(0) \Leftrightarrow x - \frac{x^3}{3} - \eta\mu x < 0 \Leftrightarrow x - \frac{x^3}{3} < \eta\mu x$$

ΑΣΚΗΣΗ 36

α) Έστω η συνάρτηση $f(x) = 6x^2 \ln x + 6x - 2x^3 - 3x^2 - 1$, $x > 0$ συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και $f'(x) = 12x \ln x - 6x^2 + 6$, $x > 0$ και $f'(1) = 0$.

$$f''(x) = 12(\ln x - x + 1), \quad x > 0 \text{ και } f''(1) = 0.$$

$$f^{(3)}(x) = 12 \frac{1-x}{x}, \text{ και } f^{(3)}(1) = 0. \text{ Οπότε έχουμε :}$$

x	0	1	$+\infty$
$f^{(3)}(x)$		+	-
$f''(x)$		↗	↘

Η f'' έχει μέγιστο άρα $f''(x) \leq f''(1) = 0$, για κάθε $x > 0$.

Οπότε η f' είναι γνησίως φθίνουσα.

Τέλος, έχουμε :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		↗	↘

Άρα η f έχει μέγιστο και προκύπτει $f(x) \leq f(1) = 0$, για κάθε $x > 0$.

β) Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2$, $x \geq 0$ συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και

$$f'(x) = e^x - x - 1.$$

$$f''(x) = e^x - 1 > 0 \text{ για κάθε } x > 0. \text{ Άρα η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα και ισχύει } f'(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x \geq 0.$$

Άρα για $x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(0) \Rightarrow f(x) \geq 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 37

Παρατηρούμε ότι τα σημεία 0,1,2 είναι θέσεις ολικών ελαχίστων της f αφού $f(x) \geq 0$. Όμως αφού το 0 και το 2 είναι άκρα κλειστού διαστήματος το θεώρημα Fermat ισχύει για το 1, άρα $f'(1) = 0$. Εφαρμόζουμε για την f θεώρημα Rolle στα $[0,1]$, $[1,2]$,..... $f'(\kappa) = f'(\lambda) = 0$ και μετά εφαρμόζουμε θεώρημα Rolle για την f' στα $[\kappa,1]$, $[1,\lambda]$.

ΑΣΚΗΣΗ 38

Αν η f δεν είναι παραγωγίσιμη σε κάποιο ξ στο (α, β) αυτό είναι κρίσιμο σημείο. Αντιθέτως αν η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το (α, β) ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle, οπότε έχει κρίσιμο σημείο.

ΑΣΚΗΣΗ 39

Παρατηρείστε ότι $f(x)(e^x - x) \leq x^5 + x^2 \Leftrightarrow f(x)(e^x - x) - x^5 - x^2 \leq 0 \Leftrightarrow g(x) \leq g(0)$, όπου

$$g(x) = f(x)(e^x - x) - x^5 - x^2 \text{ οπότε}$$

$\left. \begin{array}{l} \text{Η } g \text{ παραγωγίσιμη στο } 0 \\ \text{Η } g \text{ παρουσιάζει στο } 0 \text{ ακρότατο} \\ \text{Το } 0 \text{ είναι εσωτερικό σημείο του } \mathbb{R} \end{array} \right\} \underline{\text{Θ. Fermat}} : g'(0) = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow f'(0) = 0$

ΑΣΚΗΣΗ 40

α) Η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{x^v}$, $x > 0$ είναι συνεχής και ισχύει $f'(x) = \frac{e^x \cdot (x - v)}{x^{v+1}}$.

x	0	v	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$		↘	↗

Η f έχει ελάχιστο το $f(v) = \frac{e^v}{v^v}$.

β) Αφού η f έχει ελάχιστο το $f(v) = \frac{e^v}{v^v}$ ισχύει $f(x) \geq f(v) \Rightarrow \dots e^x \geq \left(\frac{x \cdot e}{v}\right)^v$.

γ) $a^x \geq \left(\frac{a \cdot x}{v}\right)^v \Leftrightarrow \frac{a^x}{x^v} \geq \frac{a^v}{v^v}$. Άρα η συνάρτηση $f(x) = \frac{a^x}{x^v}$ έχει ελάχιστο για $x = v$, οπότε από θεώρημα

Fermat $f'(v) = 0 \Rightarrow \dots a = e$

ΑΣΚΗΣΗ 41

i. Είναι $f'(x) = (1 - vx)e^{-vx}$ και $f''(x) = v(vx - 2)e^{-vx}$, οπότε εύκολα διαπιστώνουμε ότι

η f στρέφει τα κοίλα άνω στο $\left(\frac{2}{v}, +\infty\right)$ και τα κοίλα κάτω στο $\left(-\infty, \frac{2}{v}\right)$.

Το σημείο $\Sigma\left(\frac{2}{v}, \frac{2}{v}e^{-2}\right)$ είναι σημείο καμπής.

ii. $\dots g''(x) = 3(2x - \alpha) \dots$ σημείο καμπής το $A\left(\frac{\alpha}{2}, f\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)$

iii. Για κάθε $x < 0$, $h''(x) = e^x > 0$ και για κάθε $x \in (0, 1)$ είναι $h''(x) = 2 > 0$, ενώ για κάθε $x > 1$ είναι $f''(x) = \dots 6(x - 2)$. Προφανώς αφού στο 0 δεν αλλάζουν τα κοίλα δεν εξετάζουμε για την ύπαρξη εφαπτόμενης γιατί δεν μπορεί να είναι θέση σημείου καμπής. Στο 1 αλλάζουν τα κοίλα άρα εξετάζουμε ως προς την ύπαρξη εφαπτόμενης μέσω παραγωγισιμότητας (η κατακόρυφη εφαπτόμενη είναι εκτός ύλης). Είναι $\lim_{x \rightarrow 1^+} \lambda(x) = \dots = -9$ και $\lim_{x \rightarrow 1^-} \lambda(x) = \dots = 2 \dots$ άρα το $A(1, f(1))$ δεν είναι σημείο καμπής.

Προφανώς και το $B(2, f(2))$ είναι σημείο καμπής το οποίο είναι και μοναδικό

ΑΣΚΗΣΗ 42

A. Είναι $f'(x) = (1 - \alpha)x^2 - 2x + (\alpha - 1)^2$

Πρέπει $\dots f'(1) = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \alpha^2 - 3\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ ή $\alpha = 3$

Για $\alpha = 0$ είναι $f'(x) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 > 0$ για $x \neq 1$ και f συνεχής άρα η f δεν παρουσιάζει ακρότατο, ενώ για $\alpha = 3$ παρουσιάζει όπως θα δούμε στον παρακάτω πίνακα.

B. i. Για $\alpha = 3$ είναι $f'(x) = \dots = -2(x + 2)(x - 1)$ και

$$f''(x) = -2(2x + 1)$$

Οπότε έχουμε τον πίνακα μεταβολών:

Πίνακας μεταβολών

	0	1	$+\infty$
$f''(x)$	—	—	—
$f'(x)$	+	0	—
$f(x)$			

T.EΛ.

T.M.

$$f(0) = -\frac{1}{3} \quad f(1) = 2$$

ii. Σύνολο τιμών $f([0,1]) = \left[-\frac{1}{3}, 2\right]$ και $f([1,+\infty)) = (-\infty, 2]$ (αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$).

iii. Για κάθε $x \geq 0$, $f(x) \leq 2$ και για κάθε $x \geq 0$ είναι $e^x + 1 \geq 2$, άρα για κάθε $x \geq 0$ $f(x) \leq e^x + 1$.

ΑΣΚΗΣΗ 43

i.f κυρτή και g κοίλη. Ζητάμε x_1 ώστε $\begin{cases} e^{x_1} = x_1 + 1 \\ e^{x_1} = 1 \end{cases}$ και x_2 ώστε $\begin{cases} -x_2^2 - x_2 = x_2 + 1 \\ -2x_2 - 1 = 1 \end{cases}$ προφανώς

είναι $x_1 = 0$ και $x_2 = -1$.

ii. Αφού f κυρτή θα έχει γραφική παράσταση πάνω από κάθε εφαπτόμενη της και αφού g κοίλη θα έχει γραφική παράσταση κάτω από κάθε εφαπτόμενη της. Άρα $e^x \geq x + 1 \geq -x^2 - x$ για κάθε πραγματικό x. Όμως οι δύο ισότητες ισχύουν για δύο μοναδικά διαφορετικά x...άρα... $e^x > x + 1 > -x^2 - x$ για κάθε πραγματικό x.

ΑΣΚΗΣΗ 44

i. Το πεδίο ορισμού είναι το $(1, +\infty)$ και είναι $\dots f''(x) = \frac{\ln x + 1}{x^2 \ln^2 x} > 0$ για κάθε $x > 1$, άρα f κυρτή.

ii. $\dots y = -\frac{1}{e}x + 1$

iii. Αφού η f είναι κυρτή η γραφική της παράσταση θα είναι πάνω από κάθε εφαπτόμενη άρα για κάθε

$x > 1$ είναι $-\ln(\ln x) \geq -\frac{1}{e}x + 1 \Leftrightarrow \ln(\ln x) \leq \frac{x}{e} - 1 \Leftrightarrow \dots \ln x \leq e^{\frac{x}{e}} \cdot \frac{1}{e} \dots \Leftrightarrow \ln x^e \leq e^{\frac{x}{e}}$, προφανώς η ισότητα ισχύει μόνο για το e (σημείο επαφής)

iv. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ στην f στα διαστήματα $[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}]$, $[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta]$ άρα υπάρχουν ξ_1, ξ_2 με

$$\xi_1 < \xi_2 \text{ ώστε } f'(\xi_1) = \frac{f(\frac{\alpha+\beta}{2}) - f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \text{ και } f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f(\frac{\alpha+\beta}{2})}{\frac{\beta-\alpha}{2}}. \text{ Λόγω κυρτότητας}$$

$$f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow \dots -2 \ln(\ln \frac{\alpha+\beta}{2}) < -\ln(\ln \alpha) - \ln(\ln \beta) \Leftrightarrow \dots \ln(\ln \frac{\alpha+\beta}{2}) > \ln[\ln \alpha \cdot \ln \beta]^{\frac{1}{2}} \dots$$

ΑΣΚΗΣΗ 45

i. Επειδή η f είναι συνεχής δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες στο R. Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \dots + \infty$ άρα δεν έχει

ασύμπτωτη στο $+\infty$. Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \dots \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} \stackrel{\infty/\infty}{\text{DelHospital}} \dots = 0$ άρα έχει οριζόντια ασύμπτωτη την $y = 0$ ($x'x$)

ii. Επειδή η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ εξετάζουμε για κατακόρυφη ασύμπτωτη μόνο στο 0.

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x - \ln x) = \dots + \infty$ άρα όντως ο $y'y$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \dots \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \frac{\ln x}{x}) \stackrel{\infty/\infty}{\text{DelHospital}} \dots = 1$, όμως $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \dots - \infty$

άρα δεν υπάρχει ασύμπτωτη στο $+\infty$.

iii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x(x^2 + 1)} = 1$ άρα δεν υπάρχει κατακόρυφη ασύμπτωτη. Είναι $|h(x)| \leq \frac{1}{|x^3 + x|} \dots$ άρα από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0$ άρα ο $x'x$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης.

ΑΣΚΗΣΗ 46

Αφού η ευθεία $y = x + 3$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 3$.

$$\text{Τότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1} \cdot f(x) + 2\mu x^2 + 3}{x^2 \cdot f(x) - x^3 + \sqrt{x^4 + 1}} = 4 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x} \cdot \frac{f(x)}{x} + 2\mu + \frac{3}{x^2}}{\frac{f(x) - x + \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x^2}}{x}} = 4 \Rightarrow \dots \mu = 7.$$

ΑΣΚΗΣΗ 47

α) Εφαρμόζουμε θεώρημα Rolle στο $[0, 1]$ και αφού $f''(x) > 0$, η f' είναι γνησίως αύξουσα. Άρα υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 1)$ ώστε $f'(x_0) = 0$.

β) $x < x_0 \Leftrightarrow f'(x) < f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x) < 0$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, x_0]$. Ομοίως προκύπτει ότι είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, 1]$.

γ) $0 < x \leq x_0 \xRightarrow{f: \gamma\text{ν. φθίν.}} f(x) > f(0) = 0$ και $x_0 \leq x < 1 \xRightarrow{f: \gamma\text{ν. αύξ.}} f(x) < f(1) = 0$. Άρα $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$.

ΑΣΚΗΣΗ 48

α) Αφού η συνάρτηση f έχει σύνολο τιμών $[-1, 4]$ και $f(1) \neq -1$, $f(1) \neq 4$, $f(e) \neq -1$, $f(e) \neq 4$ έπεται ότι υπάρχουν αριθμοί $x_1, x_2 \in (1, e)$ τέτοιοι ώστε $f(x_1) = -1$ και $f(x_2) = 4$, οπότε :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Η } f \text{ παραγωγίσιμη στα } x_1, x_2 \\ \text{Η } f \text{ παρουσιάζει στο } x_1 \text{ ελάχιστο και στο } x_2 \text{ μέγιστο} \\ \text{Τα } x_1, x_2 \text{ είναι εσωτερικά σημεία του } [1, e] \end{array} \right\} \Theta. \text{ Fermat } f'(x_1) = f'(x_2) = 0$$

β) Για τη $g(x) = f(x)[f'(x) - 4f^4(x)] - x$ είναι :

$$\Rightarrow g(x_1) = f(x_1)[f'(x_1) - 4f^4(x_1)] - x_1 \stackrel{f(x_1)=-1}{\underset{f'(x_1)=0}{=}} 4 - x_1 > 0 \text{ γιατί } x_1 \in (1, e)$$

$$\Rightarrow g(x_2) = f(x_2)[f'(x_2) - 4f^4(x_2)] - x_2 \stackrel{f(x_2)=4}{\underset{f'(x_2)=0}{=}} -4^6 - x_2 < 0 \text{ γιατί } x_2 \in (1, e)$$

συνεπώς από το Θ. Bolzano...

ΑΣΚΗΣΗ 49

Αφού η f είναι κοίλη τότε είναι παραγωγίσιμη και με γνησίως φθίνουσα παράγωγο στο $\mathbb{R}$.

Επιπλέον από το Θ. Rolle έπεται ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ έτσι ώστε $f'(\xi) = 0$ και είναι μοναδικό γιατί η f' είναι γνησίως φθίνουσα άρα και 1-1. Συνεπώς

	α	ξ	β	
$f'(x)$	+	0	-	Δηλαδή η f παρουσιάζει μέγιστο το $f(\xi)$ και ελάχιστο το $f(\alpha) = f(\beta)$
f				Άρα για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ θα είναι $f(x) < f(\alpha)$.

ΑΣΚΗΣΗ 50

α) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \frac{(x-\alpha)^2}{2\alpha x^2}$.

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		+	+
$f(x)$			

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) $x^2 - \alpha^2 = 2\alpha x (\ln x - \ln \alpha) \Leftrightarrow \dots f(x) = 0$ που έχει μοναδική ρίζα την $x = \alpha$.

γ) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x^2 - \alpha^2}{2\alpha x} + \ln \frac{\alpha}{x} \right) \stackrel{u = \frac{\alpha}{x}}{=} \lim_{\substack{u = \frac{\alpha}{x} \\ x \rightarrow 0^+ \Leftrightarrow u \rightarrow +\infty}} \dots = -\infty$. Άρα η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη τον $y'y$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - \alpha^2}{2\alpha x^2} + \frac{\ln \alpha}{x} - \frac{\ln x}{x} \right) = \frac{1}{2\alpha} + 0 - 0 = \frac{1}{2\alpha}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \frac{x}{2\alpha} \right] = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-\alpha}{2x} + \ln \frac{\alpha}{x} \right) = \dots = -\infty$$

δ) Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2\alpha}$. Θέτω $\frac{f(x)}{x} = g(x)$, άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot g(x) = +\infty$.

Το σύνολο τιμών της f είναι το $\left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = \mathbb{R}$.

ε) $f''(x) = \frac{x-\alpha}{x^3}$ και

x	0	α	$+\infty$
$f''(x)$		-	+
$f(x)$			

Άρα έχει σημείο καμπής το $A(\alpha, 0)$.

στ) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα ισχύει $0 < \alpha < \beta \Rightarrow f(\alpha) < f(\beta) \Rightarrow f(\beta) > 0 \Rightarrow \dots \ln \frac{\alpha}{\beta} > \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha\beta}$.

ΑΣΚΗΣΗ 51

α) Η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = f'(x) - 3 = \frac{-2}{2^x + 1} < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ άρα g γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Επειδή g γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ η εξίσωση $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 3x$ έχει το πολύ μια ρίζα

γ) Είναι $f''(x) = \frac{2 \cdot 2^x \ln 2}{(2^x + 1)^2} > 0$ άρα f κυρτή στο $\mathbb{R}$

δ) Εφαρμόζοντας Θ.Μ.Τ. για την f στο $[x, x+1], x \in \mathbb{R}$ συμπεραίνω ότι υπάρχει $\xi \in (x, x+1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1-x} = f(x+1) - f(x) \text{ όμως } x < \xi < x+1 \text{ και αφού } f' \text{ γν.αύξουσα (f κυρτή) έχω:}$$

$$f'(x) < f'(\xi) < f'(x+1) \Leftrightarrow \frac{3 \cdot 2^x + 1}{2^x + 1} < f(x+1) - f(x) < \frac{3 \cdot 2^{x+1} + 1}{2^{x+1} + 1} \text{ από όπου με κριτήριο παρεμβολής}$$

$$\text{παίρνω: } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x)) = 3$$

ΑΣΚΗΣΗ 52

i. Θέτουμε $h(x) = \frac{f(x) \cdot \ln(x-3)}{(x-4)^2} \stackrel{x \neq 4}{\Leftrightarrow} \dots f(x) = h(x) \cdot \frac{(x-4)^2}{\ln(x-3)}$ Όμως $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)^2}{\ln(x-3)} \stackrel{0/0}{\text{DelHosp}} = \dots 0$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 0 \stackrel{\text{f συνεχής}}{=} f(4)$

ii. α) Υπάρχουν κ, λ στο $(1, 4)$ ώστε $f(\kappa) = -2, f(\lambda) = 5 \dots$ από θεώρημα Fermat $f'(\kappa) = f'(\lambda) = 0$.

β) Από θεώρημα Rolle στην f' στο $[\kappa, \lambda]$ υπάρχει μοναδικό ξ στο (κ, λ) ($f'' \nearrow$) ώστε $f''(\xi) = 0$. **Προσοχή!**

Για να είναι θέση σημείου καμπής πρέπει να αποδείξουμε ότι η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του

ξ . Πράγματι για κάθε $x > \xi \stackrel{f'' \nearrow}{\Leftrightarrow} f''(x) > 0 \dots$

iii. α) Εφαρμόζουμε θεώρημα Bolzano στην συνάρτηση $f'(x) - f(x)$ στο διάστημα $[\kappa, \lambda]$

β) Το ζητούμενο $f''(4) > \frac{2 - f(x_0)}{4 - x_0}$ γράφεται λόγω του προηγούμενου ερωτήματος $f''(4) > \frac{2 - f'(x_0)}{4 - x_0}$

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ στην f' στο $[x_0, 4]$ άρα υπάρχει μ στο

$$(x_0, 4) \text{ με } f''(\mu) = \frac{f'(4) - f'(x_0)}{4 - x_0} \stackrel{f'' \nearrow}{\Rightarrow} \dots f''(4) > \frac{f'(4) - f'(x_0)}{4 - x_0}$$

Θα θέλαμε λοιπόν να δείξουμε ότι $f'(4) = 2$.

Θέτουμε $h(x) = \frac{f(x) \cdot \ln(x-3)}{(x-4)^2} \stackrel{x \neq 4}{\Leftrightarrow} \dots \frac{f(x)}{(x-4)} = h(x) \cdot \frac{(x-4)}{\ln(x-3)}$ Όμως $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)}{\ln(x-3)} \stackrel{0/0}{\text{DelHosp}} = \dots 1$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)}{x-4} = 2 \stackrel{f(4)=0}{=} f'(4)$.

ΑΣΚΗΣΗ 53

i. Για κάθε $x > 0$ $f(x) = e^{\frac{\ln x}{x}}$ Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty \Rightarrow \dots \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$ άρα f συνεχής στο $[0, +\infty)$.

Είναι $f'(x) = \dots = x^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1 - \ln x}{x^2} \right)$ για κάθε $x > 0 \dots$ άρα $f \nearrow$ στο $[0, e]$ και $f \searrow$ στο $[e, +\infty)$.

Στο 0 παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο 0 και στο e ολικό μέγιστο $e^{\frac{1}{e}}$

ii. Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\infty/\infty}{\text{DelHosp}} = \dots 0 \Rightarrow \dots \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \dots$ άρα από το i προκύπτει το ολικό σύνολο τιμών είναι το

$$[0, e^{\frac{1}{e}}]$$

Προσοχή! Οι αριθμοί 3, 4, 5 ανήκουν στο ίδιο διάστημα μονοτονίας της f , ενώ ο 2 όχι. Παρατηρούμε βέβαια

ότι $\sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$. Επίσης $e > 3 > 4 > 5 \stackrel{f \searrow [e, +\infty)}{\Leftrightarrow} f(3) > f(4) > f(5) \dots \sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4} = \sqrt{2} > \sqrt[5]{5}$

iii. Δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες αφού η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$. Είδαμε πριν ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ άρα έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την $(\varepsilon): y = 1$

iv. Θέλω να υπάρχει x_0 ώστε $f(x_0) = x_0$ και $f'(x_0) = 1$ Παρατηρούμε ότι ο 1 πληροί και τις δύο συνθήκες.