

ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ 2 (Β' ΜΕΡΟΣ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ)

ΑΣΚΗΣΗ 1

α) Εφαρμόζουμε θεώρημα Rolle για την f στο $[0,1]$.

β) $(x+1)^{x+1} = e^{1-x} \Leftrightarrow (x+1)\ln(x+1) = 1-x \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow f'(x) = 0$, η οποία έχει μία τουλάχιστον ρίζα από το α) ερώτημα.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Από θεώρημα Rolle για την f στο $[a, \beta]$ προκύπτει ότι υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

Από θεώρημα Rolle για την f' στα $[a, \xi]$ και $[\xi, \beta]$ προκύπτει ότι υπάρχουν $\kappa \in (a, \xi)$ και $\lambda \in (\xi, \beta)$ τέτοια ώστε $f''(\kappa) = f''(\lambda) = 0$. Δηλαδή, υπάρχουν δύο τουλάχιστον κρίσιμα σημεία της f' στο (a, β) .

ΑΣΚΗΣΗ 3

- Θ. Bolzano για τη συνάρτηση $f(x) = x^3 + x - 1$ στο $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ και στη συνέχεια μελέτη της μονοτονίας της f .
- Θ. Bolzano για τη συνάρτηση $g(x) = \sin x - \frac{1-2x}{x(x^2-1)}$ στο $\left[\frac{1}{2}, \rho\right]$ και λαμβάνοντας υπόψιν ότι $\rho^3 + \rho = 1 \Leftrightarrow \rho^3 = 1 - \rho$
 $g(\rho) = \sin \rho - \frac{1-2\rho}{\rho(\rho^3-1)} = \sin \rho - 1 < 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 4

Με Θ. Rolle για τη συνάρτηση $f(x) = 4x^4 + 4\beta x^3 - 3\gamma x^2 - 4\beta x + 3\gamma x - 4x$ στο $[0, 1]$ διαπιστώνουμε ότι η εξίσωση $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 16x^3 + 12\beta x^2 - 6\gamma x - 4\beta + 3\gamma - 4 = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$.

Ακολούθως, αν υποθέσουμε ότι είχε δύο πραγματικές ρίζες $x_1 < x_2$ τότε εφαρμόζοντας Θ. Rolle για τη συνάρτηση $g(x) = 16x^3 + 12\beta x^2 - 6\gamma x - 4\beta + 3\gamma - 4$ στο $[x_1, x_2]$ καταλήγουμε ότι η εξίσωση $8x^2 + 4\beta x - \gamma = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (x_1, x_2) , ΑΤΟΠΟ γιατί έχει $\Delta = 16(\beta^2 + 2\gamma) < 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 5

Η αρχική σχέση γράφεται $\alpha^{f(\beta)} = \beta^{f(\alpha)} \Leftrightarrow f(\beta) \ln \alpha = f(\alpha) \ln \beta \Leftrightarrow \frac{f(\alpha)}{\ln \alpha} = \frac{f(\beta)}{\ln \beta}$. Έστω η συνάρτηση

$g(x) = \frac{f(x)}{\ln x}$, $x \in [a, \beta]$. Από θεώρημα Rolle προκύπτει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(\xi) \cdot \ln \xi - f(\xi) \cdot \frac{1}{\xi}}{\ln^2 \xi} = 0 \Leftrightarrow \xi \cdot f'(\xi) \cdot \ln \xi = f(\xi).$$

ΑΣΚΗΣΗ 6

Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $\frac{f'(x)}{\epsilon\phi x} = -f(x) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow f'(x) \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x f(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x} \right)' = 0$.

$\begin{matrix} \eta\mu x \neq 0 \\ \Leftrightarrow \\ \sigma\upsilon\nu x \neq 0 \\ \text{αφού } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \end{matrix}$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x}$, με $x \in [\alpha, \beta]$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Rolle, υπάρχει ένα

τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $h'(\xi) = 0$, δηλαδή, η εξίσωση $\frac{f'(x)}{\epsilon\phi x} = -f(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα

στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Παρατήρηση: Από την σχέση $f(\alpha) \sigma\upsilon\nu \beta = f(\beta) \sigma\upsilon\nu \alpha$ παρατηρούμε ότι $\frac{f(\alpha)}{\sigma\upsilon\nu \alpha} = \frac{f(\beta)}{\sigma\upsilon\nu \beta}$ και έτσι επιλέγουμε τη συνάρτηση.

ΑΣΚΗΣΗ 7

i. Η f είναι συνεχής στο μηδέν από κριτήριο παρεμβολής $-x^2 \leq x^2 \eta\mu \frac{1}{x} \leq x^2$.

Οπότε f συνεχής στο $\left[0, \frac{1}{\pi}\right]$, παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{1}{\pi}\right)$ και $f(0) = f\left(\frac{1}{\pi}\right) = 0$, άρα πληροί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

ii. Είναι $f'(x) = 2x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} + x^2 \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} - \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x}$. Από το θεώρημα Rolle για την f

στο $\left[0, \frac{1}{\pi}\right]$, υπάρχει, ξ στο $\left(0, \frac{1}{\pi}\right)$ ώστε: $f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 2\xi \cdot \eta\mu \frac{1}{\xi} - \sigma\upsilon\nu \frac{1}{\xi} = 0 \Leftrightarrow 2\xi - \sigma\phi \frac{1}{\xi} = 0 \Leftrightarrow \sigma\phi \frac{1}{\xi} = 2\xi$.

Είναι $\eta\mu \frac{1}{\xi} \neq 0$ διότι διαφορετικά θα έπρεπε από την προηγούμενη σχέση να ισχύει

$\eta\mu \frac{1}{\xi} = 0$ και $\sigma\upsilon\nu \frac{1}{\xi} = 0$ πράγμα άτοπο.

ΑΣΚΗΣΗ 8

Είναι $g(\alpha) - g(\beta) = \ln \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} \Leftrightarrow \ln f(\alpha) - g(\alpha) = \ln f(\beta) - g(\beta)$ Για τη συνάρτηση

$h(x) = \ln f(x) - g(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$, ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle και ισχύει ότι : υπάρχει

$x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $h'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \dots \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} = g'(x_0)$.

ΑΣΚΗΣΗ 9

α) Αρκεί $g(0) = g(1) \Leftrightarrow f(0) - \ln \alpha = f(1) - \ln(\alpha + 1) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{e-1}$.

β) Με Θ. Rolle για την g στο $[0,1]$ προκύπτει $g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = \frac{e-1}{(e-1)x_0 + 1}$.

ΑΣΚΗΣΗ 10

Αφού οι αριθμοί α, β, γ είναι με αυτή τη σειρά διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου τότε $\beta - \alpha = \gamma - \beta > 0$. Για τον ίδιο λόγο έπεται ότι και $f(\beta) - f(\alpha) = f(\gamma) - f(\beta)$ επομένως

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{f(\gamma) - f(\beta)}{\gamma - \beta}.$$

Εφαρμόζοντας Θ.Μ.Τ. για την συνάρτηση f στα $[\alpha, \beta]$, $[\beta, \gamma]$ προκύπτει ότι υπάρχουν $\xi_1 \in (\alpha, \beta)$ και $\xi_2 \in (\beta, \gamma)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$.

Ακολούθως εφαρμόζοντας Θ. Rolle για την f' στο $[\xi_1, \xi_2]$ προκύπτει το ζητούμενο.

ΑΣΚΗΣΗ 11

Παρατηρείστε ότι $2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = f(\alpha) + f(\beta) \Leftrightarrow f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha) = f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$, οπότε

εφαρμόζοντας Θ.Μ.Τ. για την f στα $\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$, $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$ έπεται ότι υπάρχουν $\xi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ και

$\xi_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$.

Ακολούθως εφαρμόζοντας Θ. Rolle για την f' στο $[\xi_1, \xi_2]$ προκύπτει το ζητούμενο.

ΑΣΚΗΣΗ 12

i. Εφαρμόζουμε θεώρημα Bolzano στην $h(x) = f(x) - \alpha x$ στο $[0,1]$

ii. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. στην f στα διαστήματα $[0, x_0]$, $[x_0, 1]$, με x_0 αυτό που βρήκαμε στο i, οπότε

$$f'(x_1)f'(x_2) = \frac{\alpha(x_0 - 1) - \alpha x_0}{x_0(1 - x_0)} = \alpha^2.$$

iii. Προφανώς δε μπορεί $\alpha^2 = -1$.

ΑΣΚΗΣΗ 13

- i. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ στα $[4,22]$ και $[22,40]$ και προκύπτει το ζητούμενο
 ii. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ στα διαστήματα $[4,10]$, $[10,22]$, $[22,40]$ και προκύπτει το ζητούμενο

Πως βρήκαμε τα διαστήματα;

- i. Αφού ζητάμε x_1, x_2 σκεφτόμαστε να «σπάσουμε» το διάστημα σε κάποιο κ έτσι ώστε να προκύπτει το ζητούμενο... $\frac{f(\kappa)-500}{\kappa-4} + \frac{518-f(\kappa)}{40-\kappa} = 1$ Παρατηρούμε ότι οι αριθμητές έχουν άθροισμα 18 άρα θα θέλαμε παρανομαστές ίσους με 18. Οπότε διαλέγουμε $\kappa = 22$
 ii. Αφού ζητάμε ξ_1, ξ_2, ξ_3 σκεφτόμαστε να «σπάσουμε» το διάστημα σε κάποια τ, ρ έτσι ώστε να προκύπτει το ζητούμενο... $\frac{f(\tau)-500}{\tau-4} + 2\frac{f(\rho)-f(\tau)}{\rho-\tau} + 3\frac{518-f(\rho)}{40-\rho} = 3$

$$\Leftrightarrow \frac{f(\tau)-500}{\tau-4} + \frac{f(\rho)-f(\tau)}{\frac{\rho-\tau}{2}} + \frac{518-f(\rho)}{\frac{40-\rho}{3}} = 3$$
 Παρατηρούμε ότι οι αριθμητές έχουν άθροισμα 18 άρα θα θέλαμε παρανομαστές ίσους με 6. Οπότε διαλέγουμε ...

ΑΣΚΗΣΗ 14

1^{ος} τρόπος : Είναι $\xi = \ln\left(\frac{e^2-1}{2e}\right) \Leftrightarrow e^\xi = \frac{e^2-1}{2e} \Leftrightarrow e^\xi = \frac{e-e^{-1}}{2}$, οπότε εφαρμόζοντας Θ.Μ.Τ. για την συνάρτηση $f(x) = e^x$ στο $[-1,1]$ αποδεικνύεται το ζητούμενο.

2^{ος} τρόπος : Αρκεί να αποδείξουμε ότι $-1 < \ln\left(\frac{e^2-1}{2e}\right) < 1$ η οποία ισοδύναμα γίνεται

$$\ln\left(\frac{1}{e}\right) < \ln\left(\frac{e^2-1}{2e}\right) < \ln e \Leftrightarrow \frac{1}{e} < \frac{e^2-1}{2e} < e \Leftrightarrow 2 < e^2-1 < 2e^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < e^2-1 \Leftrightarrow 3 < e^2 \text{ ισχύει} \\ \text{και} \\ e^2-1 < 2e^2 \Leftrightarrow -1 < e^2 \text{ ισχύει} \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΗ 15

Έστω $(\varepsilon): y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ τυχαία εφαπτομένη της C_f . Έστω $A(\xi, f(\xi))$ κοινό σημείο (ε) , C_f με $\xi \neq x_0$. Τότε $f(\xi) - f(x_0) = f'(x_0)(\xi - x_0) \Leftrightarrow \frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0} = f'(x_0)$. Αν $\xi < x_0$ από Θ.Μ.Τ. στο $[\xi, x_0]$ υπάρχει $\kappa \in (\xi, x_0): f'(\kappa) = f'(x_0)$, που είναι άτοπο, αφού $f \not\equiv 1-1$.

ΑΣΚΗΣΗ 16

Αφού $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$ τότε τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά αν και μόνο αν

$\lambda_{AB} = \lambda_{B\Gamma} \Leftrightarrow \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{f(\gamma) - f(\beta)}{\gamma - \beta}$, οπότε εφαρμόζοντας Θ.Μ.Τ. για την f στα διαστήματα

$[\alpha, \beta], [\beta, \gamma]$ έπεται ότι υπάρχουν $\xi_1 \in (\alpha, \beta)$ και $\xi_2 \in (\beta, \gamma)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$.

Ακολουθώντας εφαρμόζοντας Θ. Rolle για την f' στο $[\xi_1, \xi_2]$ προκύπτει το ζητούμενο.

ΑΣΚΗΣΗ 17

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση g με $g(x) = f(x) - x$. Από Θ.Μ.Τ. για την g στο $\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$ θα υπάρχει

$$\xi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right) : g'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - \frac{\alpha+\beta}{2} - f(\alpha) + \alpha}{\frac{\beta-\alpha}{2}} = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - \frac{\alpha+\beta}{2} + (\alpha - f(\alpha))}{\frac{\beta-\alpha}{2}} < 0.$$

Ομοίως εφαρμόζοντας Θ.Μ.Τ. για την g στο $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$ παίρνω $\xi_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$ τέτοιο ώστε

$$g'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - \beta + \left(\frac{\alpha+\beta}{2} - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} > 0. \text{ Εφαρμόζοντας τέλος θ. BOLZANO για τη συνεχή}$$

$g'(x) = f'(x) - 1$ στο $[\xi_1, \xi_2]$ έχω ότι $g'(\xi_1) \cdot g'(\xi_2) < 0$ άρα υπάρχει

$\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subseteq (\alpha, \beta) : g'(\xi) = 0 \Rightarrow f'(\xi) = 1$

ΑΣΚΗΣΗ 18

Παρατηρείστε ότι $f(0) > \frac{f(-1) + f(1)}{2} \Leftrightarrow f(0) - f(-1) > f(1) - f(0)$, οπότε εφαρμόζοντας Θ.Μ.Τ. για την

f στα $[-1, 0], [0, 1]$ έπεται ότι υπάρχουν $\xi_1 \in (-1, 0)$ και $\xi_2 \in (0, 1)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) > f'(\xi_2)$. Είναι όμως $\xi_1 < \xi_2$ άρα....

ΑΣΚΗΣΗ 19

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ για την f στο $[0, x]$ με $x > 0$ και προκύπτει ότι υπάρχει

$\xi \in (0, x)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x)}{x}$.

Επίσης είναι $1 \leq f'(\xi) \leq 2 \Rightarrow \dots x \leq f(x) \leq 2x$.

ΑΣΚΗΣΗ 20

α) Εφαρμόζουμε θεώρημα Rolle για την $g(x) = f(x) \cdot (1-x)$, $x \in [0, 1]$ και προκύπτει ότι υπάρχει

$\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = f'(\xi)(1-\xi)$.

β) Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ για την f στο $[0, \xi]$ και προκύπτει ότι υπάρχει

$$x_0 \in (0, \xi) \text{ τέτοιο ώστε } f'(x_0) = \frac{f(\xi) - f(0)}{\xi - 0} = \frac{f'(\xi)}{\xi} \cdot (1 - \xi) < \frac{f'(\xi)}{\xi} \text{ αφού } 0 < 1 - \xi < 1.$$

ΑΣΚΗΣΗ 21

α. Παρατηρείστε ότι $\gamma \neq \delta$ (διαφορετικά η $f(\gamma)f(\delta) < 0$ οδηγεί σε άτοπο), οπότε εφαρμόζουμε

Θ. Bolzano για την f στο $[\gamma, \delta]$ ή $[\delta, \gamma]$.

β. Έστω $\gamma < \delta$ και $f(\gamma) > 0$, $f(\delta) < 0$ (προκύπτει από την $f(\gamma)f(\delta) < 0$) τότε εφαρμόζοντας Θ.Μ.Τ. για την f στα $[\alpha, \gamma]$, $[\gamma, \delta]$ και $[\delta, \beta]$ έπεται ότι υπάρχουν

- $x_1 \in (\alpha, \gamma) : f'(x_1) = \frac{f(\gamma) - f(\alpha)}{\gamma - \alpha} > 0$,
- $x_2 \in (\gamma, \delta) : f'(x_2) = \frac{f(\delta) - f(\gamma)}{\delta - \gamma} < 0$,
- $x_3 \in (\delta, \beta) : f'(x_3) = \frac{-f(\delta)}{\beta - \delta} > 0$.

Ακόμα εφαρμόζοντας Θ.Μ.Τ. για την συνάρτηση f' στα $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$ προκύπτει ότι υπάρχουν

$$\xi_1 \in (x_1, x_2) : f''(\xi_1) = \frac{f'(x_2) - f'(x_1)}{x_2 - x_1} < 0 \text{ και } \xi_2 \in (x_2, x_3) : f''(\xi_2) = \frac{f'(x_3) - f'(x_2)}{x_3 - x_2} > 0$$

οπότε αποδεικνύεται το ζητούμενο.

Όμοια εργαζόμαστε στις υπόλοιπες περιπτώσεις.

γ. Απλή εφαρμογή του Θ. Bolzano για την συνάρτηση f'' στο $[\xi_1, \xi_2]$.

ΑΣΚΗΣΗ 22

Για $x > 0$ είναι: $f'(x) = \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow f'(x) = (\ln(x+1))'$ άρα θα υπάρχει $c_1 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$f(x) = \ln(x+1) + c_1 \text{ Όμως } f(1) = 0 \Leftrightarrow \ln 2 + c_1 = 0 \Leftrightarrow c_1 = -\ln 2 \text{ άρα } f(x) = \ln(x+1) - \ln 2 \text{ για}$$

$x > 0$. Επίσης για $x \leq 0$ $f'(x) = 2x+1 \Leftrightarrow f'(x) = (x^2 + x)'$ άρα θα υπάρχει $c_2 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$f(x) = x^2 + x + c_2$. Όμως f είναι παραγωγίσιμη στο 0 άρα και συνεχής στο 0 οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Rightarrow c_2 = -\ln 2 \text{ άρα για } x \leq 0 \text{ } f(x) = x^2 + x - \ln 2$$

ΑΣΚΗΣΗ 23

$$\alpha) \text{ Είναι } x^2 \cdot f'(x) + e^{-f(x)} = 0 \Leftrightarrow f'(x) \cdot e^{f(x)} = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow (e^{f(x)})' = \left(\frac{1}{x}\right)' \Rightarrow \dots f(x) = -\ln x.$$

$$\beta) \text{ Είναι } xf'(x) = \frac{1}{x^2} - 2f(x) \Leftrightarrow f'(x) + \frac{2}{x}f(x) = \frac{1}{x^3} \Leftrightarrow f'(x) + (2\ln x)'f(x) = \frac{1}{x^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) \cdot e^{2\ln x} + e^{2\ln x} \cdot (2\ln x)' \cdot f(x) = \frac{e^{2\ln x}}{x^3} = \frac{1}{x} \Rightarrow (f(x) \cdot e^{2\ln x})' = (\ln x)' \stackrel{f(1)=0}{\Rightarrow} \dots f(x) = \frac{\ln x}{x^2}.$$

$$\gamma) f'(x) - 1 = \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow \frac{xf'(x) - f(x)}{x} = 1 \Leftrightarrow \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{f(x)}{x} \right)' = (\ln|x|)' \Rightarrow \begin{cases} \frac{f(x)}{x} = \ln x + c_1, & \alpha \nu x > 0 \\ \frac{f(x)}{x} = \ln(-x) + c_2, & \alpha \nu x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = x \left(\ln x + \frac{1}{2} \right), & \alpha \nu x > 0 \\ f(x) = x (\ln|x| - 1), & \alpha \nu x < 0 \end{cases}$$

$$\delta) f'(x) + 2xf(x) = x \Leftrightarrow f'(x) + (x^2)'f(x) = x \Leftrightarrow e^{x^2}f'(x) + e^{x^2}(x^2)'f(x) = xe^{x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (e^{x^2}f(x))' = \left(\frac{e^{x^2}}{2} \right)' \stackrel{f(0)=1}{\Rightarrow} \dots f(x) = \frac{e^{-x^2} + 1}{2}.$$

$$\epsilon) f'(x) = e^{x-f(x)} \Leftrightarrow e^{f(x)}f'(x) = e^x \Leftrightarrow \dots \stackrel{f(0)=0}{\Leftrightarrow} f(x) = x$$

ΑΣΚΗΣΗ 24

$$a) \text{ Εύκολα διαπιστώνουμε ότι } h'(x) = \left(\frac{g(x)}{e^x} - x \right)' = \frac{g'(x)e^x - g(x)e^x}{e^{2x}} - 1 = \dots = 0, \text{ άρα η συνάρτηση}$$

$$h(x) = \frac{g(x)}{e^x} - x \text{ είναι σταθερή στο } \mathbb{R}.$$

$$b) \text{ Αφού } h(0) = \frac{g(0)}{e^0} - 0 = 1 \text{ τότε } h(x) = 1, x \in \mathbb{R} \text{ οπότε}$$

$$\frac{g(x)}{e^x} - x = 1 \Leftrightarrow f'(x) - f(x) = e^x + xe^x \Leftrightarrow e^{-x}f'(x) - e^{-x}f(x) = 1 + x \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \frac{f(x)}{e^x} = \frac{1}{2}x^2 + x + c$$

$$\text{από την οποία για } x = 0 \text{ προκύπτει } \frac{f(0)}{e^0} = c \Leftrightarrow c = 1 \text{ άρα } f(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 + x + 1 \right) e^x, x \in \mathbb{R}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 25

$$\text{Ισχύει } f'(x) = 2f(-x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ άρα και } f'(-x) = 2f(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Η } g \text{ είναι συνεχής και } g'(x) = 2f(x) \cdot f'(x) - 2f(-x) \cdot f'(-x) = 4f(x)f(-x) - 4f(-x)f(x) = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Άρα } g(x) = c \Leftrightarrow f^2(x) + f^2(-x) = c \stackrel{x=0}{\Rightarrow} \dots c = 32. \text{ Άρα } g(x) = 32.$$

ΑΣΚΗΣΗ 26

$$\frac{1}{f(x)} + \frac{1}{f'(x)} = \frac{2}{e^x} \quad \Leftrightarrow \quad e^x f'(x) + e^x f(x) = 2f'(x)f(x) \Leftrightarrow (e^x f(x))' = (f^2(x))'$$

$$\Leftrightarrow e^x f(x) = f^2(x) + c \quad \Leftrightarrow \quad \dots f(x) = e^x$$

ΑΣΚΗΣΗ 27

Είναι $f'(x) \cdot \sin x + f(x) \cdot \eta \mu x = f(x) \cdot \sin x \Leftrightarrow f'(x) \sin x - f(x) (\sin x)' = f(x) \sin x \quad \Leftrightarrow$

$$\frac{f'(x) \cdot \sin x - f(x) \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{f(x) \cdot \sin x}{\sin^2 x} \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{\sin x} \right)' = \frac{f(x)}{\sin x} \quad \text{οπότε}$$

$$\frac{f(x)}{\sin x} = c \cdot e^x \Leftrightarrow f(x) = c \cdot e^x \cdot \sin x \quad \text{και αφού } f(0) = 560 \Leftrightarrow c = 560 \quad \text{άρα } f(x) = 560 \cdot e^x \cdot \sin x.$$

ΑΣΚΗΣΗ 28

α. Είναι $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow (\ln |f(x)|)' = \left(\frac{1}{3} x \right)' \Leftrightarrow \begin{matrix} f(x) > 0 \\ f(0) = 0,1 \end{matrix} f(x) = e^{\frac{1}{3}x + \ln 0,1} = \frac{1}{10} e^{\frac{1}{3}x}$

β. i. Για κάθε $t > 0$ είναι $V(t) = 0,1\pi\rho^2(t)$ και $E(t) = 0,2\pi\rho(t)$, οπότε $V'(t) = 0,2\pi\rho(t)\rho'(t)$ (1) και $E'(t) = 0,2\pi\rho'(t) = \frac{1}{3}0,2\pi\rho(t)$ (2). Για $t = t_0$ από (2) $\rho'(t_0) = \frac{0,2}{3}$ και $V'(t_0) = \frac{0,008\pi}{3}$.

ii. Από (2) $\rho'(t) = \frac{1}{3}\rho(t)$, $\rho(0) = 0,1$ άρα από το α $\rho(t) = \frac{1}{10}e^{\frac{1}{3}t}$. Θέλουμε

$$\frac{1}{10}e^{\frac{1}{3}t} = 0,4 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow t = 3 \ln 4.$$

ΑΣΚΗΣΗ 29

Παρατηρείστε ότι για κάθε $x > -1$ είναι

$$f'(x^2 + 2x + 1) = x + 3 \Leftrightarrow 2(x+1) \cdot f'(x^2 + 2x + 1) = 2(x+1)(x+3) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f[(x+1)^2] = \frac{2}{3}x^3 + 4x^2 + 6x + c, \quad x > -1$$

Επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο 0, οπότε

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f[(x+1)^2] \stackrel{u=(x+1)^2}{=} \lim_{\substack{u=0 \\ x \rightarrow -1^+}} f(u) = f(0) = 4 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow c = \frac{20}{3}, \quad \text{οπότε από}$$

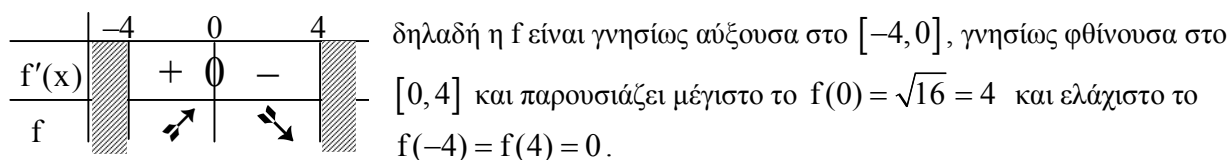
την $f[(x+1)^2] = \frac{2}{3}x^3 + 4x^2 + 6x + c$, $x > -1$ για $x=0$ έπεται $f(1) = \frac{20}{3}$.

ΑΣΚΗΣΗ 30

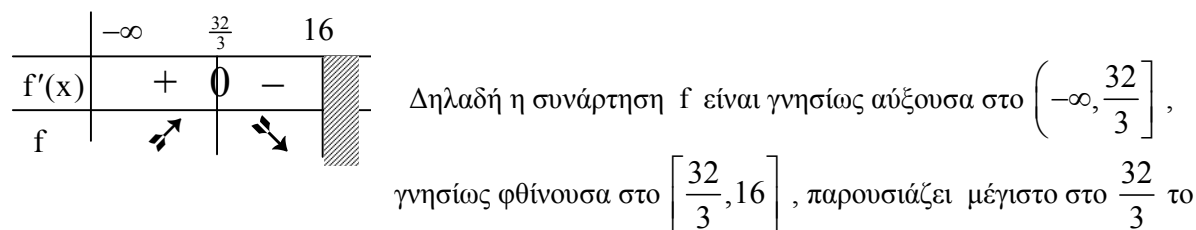
Είναι $(f^2(x))' = (e^x)' \Leftrightarrow f^2(x) = e^x + c$, όμως για $x=0$ προκύπτει $c=15$, οπότε $f^2(x) = e^x + 15$. Από το αρχικό ερώτημα $f(x) \neq 0$, άρα η f διατηρεί πρόσημο και επειδή $f(0) = -4$, $f(x) < 0$, άρα $f(x) = -\sqrt{e^x + 15}$.

ΑΣΚΗΣΗ 31

Α) Είναι $D_f = [-4, 4]$ και $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{16-x^2}}(16-x^2)' = \frac{-x}{\sqrt{16-x^2}}$, συνεπώς



Β) Είναι $f'(x) = (x\sqrt{16-x})' = \dots = \frac{32-3x}{2\sqrt{16-x}}$, επομένως



$f\left(\frac{32}{3}\right) = \frac{128\sqrt{3}}{9}$ και τοπικό ελάχιστο στο 16 το $f(16) = 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 32

α) Έχει προφανή ρίζα την $x=1$ και η συνάρτηση $g(x) = \ln x + 2x - 2$, $x > 0$ είναι γνησίως αύξουσα. Άρα η ρίζα είναι μοναδική.

β) $f'(x) = \frac{\ln x + 2x - 2}{4x\sqrt{x}} = \frac{g(x)}{4x\sqrt{x}}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ από το α) ερώτημα.

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow g(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$. Έτσι προκύπτει ο παρακάτω πίνακας:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$		$\searrow$	$\nearrow$

γ) Για $x > 1 \xRightarrow{f: \gamma\gamma. \alpha\upsilon\zeta.} f(x) > f(1) \Rightarrow \dots x - \sqrt{x} > \ln \sqrt{x}$.

ΑΣΚΗΣΗ 33

α) Παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη και προκύπτει $f'(x) = -\frac{e^{1-x}}{3f^2(x)+1} < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β) $f(\eta\mu^2 x) > f(x^2) \xRightarrow{f: \gamma\gamma. \phi\theta\iota\nu.} \eta\mu^2 x < x^2 \Leftrightarrow |\eta\mu x| < |x|$, που αληθεύει για κάθε $x \neq 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 34

i. Είναι $2f(x)f'(x) + f'(x) = 3x^2 + e^x$ (1). Έστω x_0 με $f'(x_0) = 0 \dots$ άτοπο. Η $f'(x)$ είναι συνεχής, $f'(x) \neq 0$ άρα διατηρεί πρόσημο. Για $x = 0$ (1) $f'(0) = 1$ άρα $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. $f(0) = 0$ και f γνησίως αύξουσα άρα για κάθε $x > 0$ $f(x) > 0$, ενώ για κάθε $x < 0$ $f(x) < 0$.

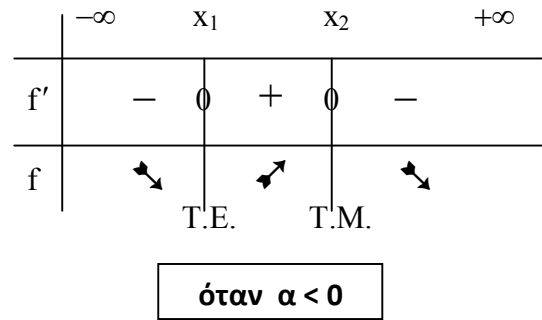
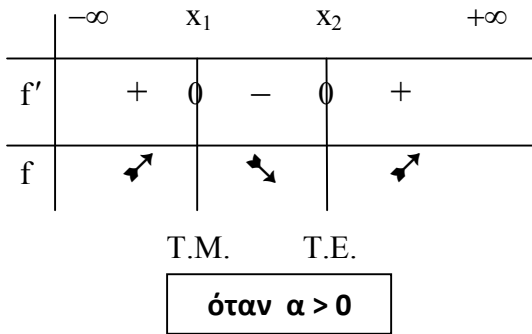
ΑΣΚΗΣΗ 35

i) Είναι $f'(x) = \frac{e^{\alpha x}(\alpha x^2 - 2x + \alpha^3)}{(x^2 + \alpha^2)^2}$ συνεπώς $f'(x) \geq 0 \xLeftrightarrow[e^{\alpha x} > 0]{(x^2 + \alpha^2)^2 > 0} \alpha x^2 - 2x + \alpha^3 \geq 0$ δηλαδή το πρόσημο

της f' εξαρτάται από το πρόσημο του τριωνύμου $\alpha x^2 - 2x + \alpha^3$.

Για το τριώνυμο (1) έχουμε $\Delta = 4 - 4\alpha^4$ οπότε :

☞ αν $\Delta > 0 \Leftrightarrow \alpha \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ τότε έχει δύο ρίζες $x_1 < x_2$ και έτσι:



δηλαδή σε κάθε περίπτωση η f έχει δύο τοπικά ακρότατα .

☞ Αν $\Delta \leq 0 \Leftrightarrow \alpha \leq -1$ ή $\alpha \geq 1$ τότε το τριώνυμο (1) συνεπώς και η f' διατηρούν σταθερό πρόσημο άρα η συνάρτηση f δεν έχει τοπικά ακρότατα .

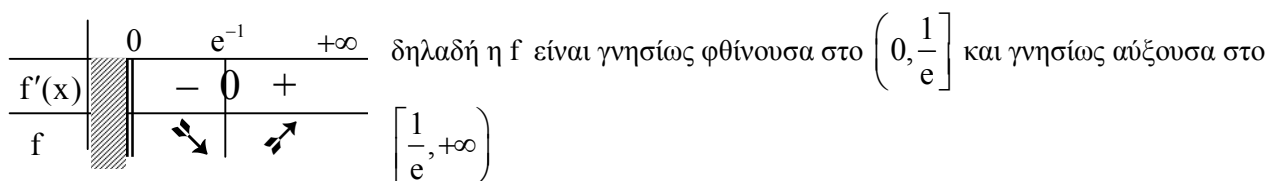
ii) Αν $\alpha \leq -1$ τότε $\alpha x^2 - 2x + \alpha^3 \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (αφού $\alpha < 0$)

οπότε $f'(x) \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

$$\text{Έτσι για } x \geq 0 \text{ είναι } f(x) \leq f(0) \Leftrightarrow \frac{e^{\alpha x}}{x^2 + \alpha^2} \leq \frac{1}{\alpha^2} \Leftrightarrow e^{\alpha x} \leq (x^2 + \alpha^2) \cdot \frac{1}{\alpha^2} \Leftrightarrow e^{\alpha x} \leq 1 + \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 .$$

ΑΣΚΗΣΗ 36

i) Είναι $f(x) = x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x \ln x}$ συνεπώς $f'(x) = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} (\ln x + 1)$, οπότε



ii) Για κάθε $x > 2$ θα είναι $x - 1 > 1$ άρα $x, x - 1 \in (e^{-1}, +\infty)$ στο οποίο η f είναι γνησίως αύξουσα ,
επομένως $x > x - 1 \Leftrightarrow f(x) > f(x - 1) \Leftrightarrow x^x > (x - 1)^{x-1}$.

ΑΣΚΗΣΗ 37

α) $f(x) = \ln x - x + \alpha, \alpha \in \mathbb{R}, x > 0$ με $f'(x) = \frac{1}{x} - x = \frac{1-x}{x}, x > 0$.

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1, f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 1$ άρα $f \nearrow$ στο $[0, 1]$ και $f \searrow$ στο $[1, +\infty)$ οπότε η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = 1$ το $f(1) = -1 + \alpha$

β) Θέλω: $\ln x \leq x + \alpha, \forall x > 0 \Leftrightarrow \ln x - x + \alpha \leq 0, \forall x > 0 \Leftrightarrow f(x) \leq 0, \forall x > 0$

$\Leftrightarrow \max f(x) \leq 0 \Leftrightarrow f(1) \leq 0 \Leftrightarrow -1 + \alpha \leq 0 \Leftrightarrow \alpha \leq 1$. Άρα η μέγιστη τιμή του α είναι το 1

γ) Η ευθεία $\varepsilon: y = x - 1$ εφάπτεται της C_g αν και μόνο αν υπάρχει $x_0 > 0$:

$$\begin{cases} \ln x_0 - 1 = -1 \\ g'(x_0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x_0 = 0 \\ \frac{1}{x_0} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x_0 = 1. \text{ Άρα το σημείο επαφής είναι το } A(1, 0).$$

Τα κοινά σημεία της ε με τη C_g είναι αυτά με τετμημένες τις λύσεις της εξίσωσης

$\ln x = x - 1 \Leftrightarrow \ln x - x + 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ η οποία έχει μοναδική λύση την $x=1$ αφού η f έχει μέγιστη τιμή $f(1)=0$. Άρα το μοναδικό κοινό σημείο είναι το σημείο επαφής.

ΑΣΚΗΣΗ 38

Είναι $f(x) = |(x-1)(x-2)|^{\frac{2}{3}}, x \in [0, 4]$, άρα:

$$f(x) = \begin{cases} (x^2 - 3x + 2)^{\frac{2}{3}}, & x \in [0, 1] \\ (-x^2 + 3x - 2)^{\frac{2}{3}}, & x \in (1, 2] \\ (x^2 - 3x + 2)^{\frac{2}{3}}, & x \in (2, 4] \end{cases}$$

...συνεχής στα $x_0 = 1$ και $x_0 = 2$.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}(x^2 - 3x + 2)^{-\frac{1}{3}}(2x - 3), & x \in [0, 1) \\ \frac{2}{3}(-x^2 + 3x - 2)^{-\frac{1}{3}}(-2x + 3), & x \in (1, 2) \\ \frac{2}{3}(x^2 - 3x + 2)^{-\frac{1}{3}}(2x - 3), & x \in (2, 4] \end{cases}$$

	0	1	$\frac{3}{2}$	2	4
$f'(x)$	-	+	0	-	+
$f(x)$					

T.M. T.EΛ. T.M. T.EΛ T.M.

$f(0)$ $f(1)$ $f\left(\frac{3}{2}\right)$ $f(2)$ $f(4)$

ΑΣΚΗΣΗ 39

Εφαρμόζοντας Θ. Bolzano για την συνάρτηση $g(x) = f(x) + x \ln x - x$ στο $[1, e]$ έπεται ότι υπάρχει

$$x_0 \in (1, e) \text{ τέτοιο ώστε } g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) + x_0 \ln x_0 = x_0.$$

Έστω ότι εκτός του x_0 υπάρχει και $x_1 \in (1, e)$ ώστε $f(x_1) + x_1 \ln x_1 = x_1 \Leftrightarrow g(x_1) = 0$ και έστω χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $x_0 < x_1$, τότε εφαρμόζοντας Θ. Rolle για την g στο $[x_0, x_1]$ καταλήγουμε ότι υπάρχει $\xi \in (x_0, x_1) \subset (1, e) : g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = -\ln \xi < 0$, ΑΤΟΠΟ.

ΑΣΚΗΣΗ 40

α) Η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική και $f'(x) = 6x^2 - 30x + 36$.

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	+
$f(x)$		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Έχει τοπικό μέγιστο το $f(2) = \alpha + 28$ και τοπικό ελάχιστο το $f(3) = \alpha + 27$.

β) Αν $\alpha \in (-28, -27) \Leftrightarrow \alpha + 28 > 0$ και $\alpha + 27 < 0$. Τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς 3 ρίζες, μία σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 2)$, $(2, 3)$, $(3, +\infty)$, διότι το σύνολο τιμών της f σε καθένα απ' αυτά περιέχει το μηδέν και η f είναι γνησίως μονότονη σε καθένα απ' αυτά.

$$\gamma) \text{ O, A, B συνευθειακά άρα } \det(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & \alpha + 28 \\ 3 & \alpha + 27 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \dots \alpha = -30$$

ΑΣΚΗΣΗ 41

$$i. f(x) = e^{(x+1) \ln \frac{x+1}{x}}$$

$$f'(x) = \dots = \left(\frac{x+1}{x} \right)^{x+1} \left[\ln \frac{x+1}{x} - \frac{1}{x} \right]$$

Για το πρόσημο της $f'(x)$ θα ασχοληθούμε με την $\varphi(x) = \ln \frac{x+1}{x} - \frac{1}{x}$, $x > 0$. Είναι

$$\varphi'(x) = \frac{x}{x+1} \left(-\frac{1}{x^2} \right) + \frac{1}{x^2} = \dots = \frac{1}{x^2} \frac{1}{x+1} > 0 \text{ άρα } \nearrow \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \dots = 0, \text{ άρα } \varphi(x) < 0, x > 0,$$

οπότε $f \searrow$.

ii. Θα είναι $f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[(x+1) \ln \frac{x+1}{x} \right] = \dots = +\infty \text{ άρα και } \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{(x+1) \ln \frac{x+1}{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \frac{x+1}{x}}{\frac{1}{x+1}} \stackrel{\text{dLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{x+1} \left(-\frac{1}{x^2} \right)}{\frac{-1}{(x+1)^2}} = \dots = 1, \text{ άρα } f(\mathbb{R}) = (e, +\infty).$$

iii. $\left(\frac{1}{x} + 1 \right)^x = \frac{\lambda x}{x+1} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x} + 1 \right)^x \frac{x+1}{x} = \lambda \Leftrightarrow f(x) = \lambda$

- Αν $\lambda > e$ μοναδική λύση
- Αν $\lambda \leq e$ αδύνατη

iv. Θέλουμε $f(g(x)) < f(x+1) \stackrel{f \searrow}{\Leftrightarrow} g(x) - x - 1 > 0$, για κάθε $x > 0$. Έστω $\Phi(x) = g(x) - x - 1$, τότε

$$\Phi'(x) = g'(x) - 1, \text{ άρα } \Phi \nearrow \text{ στο } (0, +\infty). \text{ Θέτω } \frac{g(x) - x - 1}{x \ln x} = d(x) \dots g(x) - x - 1 = d(x) x \ln x. \text{ Με τη}$$

βοήθεια του dLH δείχνουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = 0$, άρα $\lim_{x \rightarrow 0} (g(x) - x - 1) = 0$, οπότε $\Phi(x) > 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 42

β) $g'(x) = \frac{f'(x) \cdot x - f(x)}{x^2} = \frac{1}{x} \left(f'(x) - \frac{f(x)}{x} \right)$

γ) Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στο $[0, x]$, με $x > 0$ και προκύπτει ότι υπάρχει

$$\xi \in (0, x) \text{ τέτοιο ώστε } f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x}.$$

Η f' είναι γνησίως αύξουσα άρα $0 < \xi < x \Rightarrow f'(\xi) < f'(x) \Rightarrow \dots f'(x) - \frac{f(x)}{x} > 0$. Άρα η $g'(x) > 0$ και η g είναι γνησίως αύξουσα.

ΑΣΚΗΣΗ 43

Είναι $\alpha^x + \beta^x + \gamma^x \geq 2 + \sin x \Leftrightarrow f(x) \geq f(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου $f(x) = \alpha^x + \beta^x + \gamma^x - \sin x - 2$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Έτσι} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Η } f \text{ παραγωγίσιμη στο } 0 \\ \text{Η } f \text{ παρουσιάζει στο } 0 \text{ ακρότατο} \\ \text{Το } 0 \text{ είναι εσωτερικό σημείο του } \mathbb{R} \end{array} \right\} \text{Θ. Fermat: } f'(0) = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \alpha\beta\gamma = 1 \end{array} \right\}$$

ΑΣΚΗΣΗ 44

Η δοσμένη ανισότητα γίνεται $h(x) \leq h(\alpha)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου $h(x) = \frac{(g(x))^2 + 1}{f(x)}$. Έτσι

$$\left. \begin{array}{l} \text{Η } h \text{ παραγωγίσιμη στο } \alpha \\ \text{Η } h \text{ παρουσιάζει στο } \alpha \text{ ακρότατο} \\ \text{Το } \alpha \text{ είναι εσωτερικό σημείο του } \mathbb{R} \end{array} \right\} \text{Θ. Fermat: } h'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{matrix} g(\alpha)=0 \\ f(\alpha)=1 \end{matrix} f'(\alpha) = 0$$

ΑΣΚΗΣΗ 45

i. Θέτουμε $h(x) = \frac{f(x)}{\eta\mu x}$, x κοντά στο $0^+ \dots \frac{f(x)}{x} = \frac{h(x)}{\frac{\eta\mu x}{x}} \dots$ άρα $f'(0) = -1$

Θέτουμε $\Phi(x) = \frac{\ln x (f(x) - 1)}{(x - 1)}$ x κοντά στο $1^- \dots \frac{f(x) - 1}{x - 1} = \frac{\ln x}{x - 1}$ άρα επειδή $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} = \dots = 1$ θα είναι $f'(1) = 1$.

ii. Αφού $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = -1 < 0$, $f(x) < 0$ κοντά στο 0^+ οπότε το 0 θέση Τ.Μ..

Αφού $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 1 > 0$, $f(x) - f(1) < 0$ κοντά στο 1^- οπότε το 1 θέση Τ.Μ..

iii. Από θεώρημα μεγίστης και ελάχιστης τιμής θα υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ όπου η f θα παρουσιάζει ελάχιστο (δεν είναι τα άκρα ως θέσεις τοπικού μεγίστου), οπότε από θεώρημα Fermat $f'(\xi) = 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 46

Στο $[-1, 1]$, η f είναι συνεχής οπότε η f στο $[-1, 1]$ θα παρουσιάζει μια ελάχιστη τιμή m και μια μέγιστη τιμή M . Άρα υπάρχουν $x_1, x_2 \in [-1, 1]$: $m = f(x_1)$ και $M = f(x_2)$. Επίσης f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και x_1 εσωτερικό του $[-1, 1]$ αφού $f(-1) = 4,6$ και $f(1) = 4,8$ άρα από θεώρημα Fermat παίρνουμε:

$f'(x_1) = 0$. Ομοίως $f'(x_2) = 0$. Τέλος το σύνολο τιμών της f είναι το $[2, +\infty)$ άρα θα υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ με $x_0 \notin [-1, 1]$ για το οποίο ισχύει $f(x_0) = 2$ και $f(x) \geq f(2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε το 2 είναι θέση τοπικού ελάχιστου άρα από θ. Fermat θα έχουμε $f'(x_0) = 0$. Έστω $x_0 < x_1 < x_2$ από θ. Rolle για την f' στα $[x_0, x_1], [x_1, x_2]$ έχουμε: $\exists \xi_1 \in (x_0, x_1), \xi_2 \in (x_1, x_2) : f''(\xi_1) = 0, f''(\xi_2) = 0$

ΑΣΚΗΣΗ 47

α) Παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη της ισότητας και για $x = 1$ προκύπτει $f'(2) = 0$.

Έστω ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει κι άλλη ρίζα π.χ. $\rho > 2$. Τότε αν εφαρμόσουμε θεώρημα Rolle για την f' στο $[\rho, 2]$ προκύπτει άτοπο. Ομοίως αν υποθέσουμε ότι έχει κι άλλη ρίζα π.χ. $\rho < 2$. Άρα η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα την $x = 2$.

β) Επειδή η $f''(x) \neq 0$ και συνεχής, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Άρα η f' είναι γνησίως μονότονη.

Από Θ.Μ.Τ για την f στο $[0, 1]$, υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ ώστε $f'(\xi) = f(1) - f(0) > 0$.

Από Θ.Μ.Τ για την f' στο $[\xi, 2]$, υπάρχει $\xi_1 \in (\xi, 2)$ ώστε $f''(\xi_1) = \frac{f'(2) - f'(\xi)}{2 - \xi} = \frac{-f'(\xi)}{2 - \xi} < 0$. Οπότε

$f''(x) < 0$ για κάθε $x \in [0, 3]$ Άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα.

Έτσι έχουμε : $x > 2 \Leftrightarrow f'(x) < f'(2) = 0$

x	0	2	3
f'(x)		+	-
f(x)		↗	↘

Έχει μέγιστο το $f(2)$ και ελάχιστο το $f(0) < f(1) = f(3)$.

ΑΣΚΗΣΗ 48

α) Έχουμε $f'(x) = 2x - \frac{3\alpha}{4}x^2$, $x > 0$.

x	0	$\frac{8}{3\alpha}$	$+\infty$
f'(x)		+	-
f(x)		↗	↘

Άρα μέγιστο κέρδος έχουμε για $x_0 = \frac{8}{3\alpha}$.

β) Το μέγιστο κέρδος είναι $M(\alpha) = f(x_0) = \frac{64}{27\alpha^2}$.

$\frac{2}{9} \leq \alpha \leq \frac{9}{2} \Rightarrow \frac{4}{81} \leq \frac{1}{\alpha^2} \leq \frac{81}{4} \Rightarrow \frac{256}{81 \cdot 27} \leq \frac{64}{27\alpha^2} \leq 48$. Το $M(\alpha)$ είναι μέγιστο για $\alpha = \frac{2}{9}$ και το μέγιστο κέρδος είναι 48.

ΑΣΚΗΣΗ 49

Για κάθε $x \neq 1$ είναι $g(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ η οποία είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Στο $x_0 = 1$ είναι $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \stackrel{f \text{ παραγωγίσιμη}}{=} f'(1) = g(1)$, άρα η g είναι συνεχής στο 1.

Επίσης η g είναι παραγωγίσιμη στα $(-\infty, 1), (1, +\infty)$ με $g'(x) = \frac{f'(x) \cdot (x - 1) - f(x) + f(1)}{(x - 1)^2}$.

Για τη συνάρτηση $h(x) = (x - 1)f'(x) - f(x) + f(1)$ είναι $h'(x) = \dots = (x - 1)f''(x)$ οπότε

	$-\infty$	1	$+\infty$	
$h'(x)$	—	0	+	αφού $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
h				Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο 1 το $h(1) = 0$

οπότε $h(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα

$g'(x) > 0$ σε καθένα από τα $(-\infty, 1), (1, +\infty)$ επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα σε αυτά και αφού είναι συνεχής στο 1 τότε θα είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΗ 50

i. $3f^2(x)f'(x) + 3f'(x) = 1 \dots 3f'(x)[f^2(x) + 1] = 1$

Άρα $f'(x) > 0$, f  και $f(x)(f^2(x) + 3) = x$. Άρα για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) > 0$, ενώ για κάθε $x < 0$ είναι $f(x) < 0$.

ii. $6f(x)(f'(x))^2 + 3f^2(x)f''(x) + 3f''(x) = 0 \Leftrightarrow 3f''(x)[f^2(x) + 1] = -6f(x)(f'(x))^2$, άρα από i.

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dots$

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0 \dots$

Οπότε το $(0, 0)$ σημείο καμπής.

iii. Θέλω $\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} < \frac{f(\alpha) - f(0)}{\alpha - 0}$. Προκύπτει από 2 Θ.Μ.Τ. στα $[0, \alpha]$ και $[\alpha, \beta]$ καθώς και τη μονοτονία της f' .

ΑΣΚΗΣΗ 51

α) Θέτω $g(x) = \frac{f(x) - 3x}{x - 1}$. Επειδή η f συνεχής, $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) \cdot (x - 1) + 3x = 3$.

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) \cdot (x - 1) + 3x - 3}{x - 1} = 5.$$

Άρα η εφαπτομένη είναι η $\varepsilon: y = 5x - 2$.

β) i) Αφού η f είναι κοίλη, η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(1, 3)$ βρίσκεται πάνω από αυτήν. Άρα $f(x) \leq 5x - 2 \Leftrightarrow 2 - 5x + f(x) \leq 0$.

ii) Εφαρμόζουμε θεώρημα Rolle και υπάρχει $x_0 \in (1, 2)$ ώστε $f'(x_0) = 0$.

Η f είναι κοίλη άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα.

$x < x_0 \Rightarrow f'(x) > f'(x_0) = 0$ και για $x > x_0 \Rightarrow f'(x) < f'(x_0) = 0$. Άρα το $f(x_0)$ είναι μέγιστο.

ΑΣΚΗΣΗ 52

α) Θεωρούμε την $g(x) = e^x - 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

$$g'(x) = e^x - 2, x \in \mathbb{R}$$

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	$+$
$g(x)$		$\searrow$	$\nearrow$

Η g έχει ελάχιστο το $g(\ln 2) = 2 - 2\ln 2 > 0$. Άρα $g(x) \geq g(\ln 2) > 0 \Rightarrow e^x > 2x$.

β) i) Είναι $f''(x) = e^x - 2x > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η f είναι κυρτή.

ii) Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(0, 0)$ είναι η $\varepsilon: y = x$.

Αφού η f είναι κυρτή, η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(0, 0)$ βρίσκεται κάτω από αυτήν. Άρα

$$f(x) \geq x \Leftrightarrow e^x \geq \frac{x^3}{3} + x + 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 53

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη και τα α και β είναι θέσεις ακροτάτων, σύμφωνα με το θεώρημα Fermat, είναι $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$.

Θεωρούμε την $g(x) = e^{\frac{1}{f(x)}} \cdot f'(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$. Είναι παραγωγίσιμη με

$$g'(x) = -e^{\frac{1}{f(x)}} \cdot \frac{1}{f^2(x)} \cdot (f'(x))^2 + e^{\frac{1}{f(x)}} \cdot f''(x).$$

$$g(\alpha) = e^{\frac{1}{f(\alpha)}} \cdot f'(\alpha) = 0 \text{ και } g(\beta) = e^{\frac{1}{f(\beta)}} \cdot f'(\beta) = 0.$$

Σύμφωνα με το θεώρημα Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f''(\xi) = \left(\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} \right)^2$.

ΑΣΚΗΣΗ 54

Είναι $f'(x) = 4\alpha x^3 + 3\alpha x^2 + 12x - 17$ και $f''(x) = 12\alpha x^2 + 6\alpha x + 12$. Η f θα είναι κυρτή αν και μόνο αν $f''(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα $f''(x) = 0$ μόνο για διακεκριμένες τιμές του x .

- Αν $\alpha = 0$ τότε $f''(x) = 12 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η f είναι κυρτή.
- Αν $\alpha \neq 0$ τότε $f''(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αν και μόνο αν $12\alpha > 0$ και $\Delta \leq 0$.

Τελικά, η f είναι κυρτή αν και μόνο αν $0 \leq \alpha \leq 16$.

ΑΣΚΗΣΗ 55

Είναι $f'(x) = 3x^2 + 2(\alpha - 1)x - \beta$ και $f''(x) = 6x + 2(\alpha - 1)$.

- Για να παρουσιάζει η f καμπή στο 3 αναγκαία συνθήκη είναι $f''(3) = 0 \Leftrightarrow 18 + 2(\alpha - 1) = 0 \Leftrightarrow \alpha - 1 = -9 \Leftrightarrow \alpha = -8$
- Για να παρουσιάζει η f ακρότατο στο -1 το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$, αναγκαία συνθήκη με βάση το Θ. Fermat είναι $f'(-1) = 0 \Leftrightarrow 3 - 2(\alpha - 1) - \beta = 0 \Leftrightarrow 3 + 18 - \beta = 0 \Leftrightarrow \beta = 21$.

Για $\alpha = -8$ και $\beta = 21$ είναι $f'(x) = 3x^2 - 18x - 21$

από την οποία διαπιστώνουμε ότι πράγματι για $x = -1$ η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο.

	$-\infty$	-1	7	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f					

Επιπλέον, για $\alpha = -8$ είναι $f''(x) = 6x - 18$ από την οποία

διαπιστώνουμε ότι πράγματι η f παρουσιάζει στο $x = 3$ καμπή.

	$-\infty$	3	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
f		$\cap$	$\cup$

ΑΣΚΗΣΗ 56

i. $f'(x) = e^x + 2x + 1$ και $f''(x) = e^x + 2x > 0$, άρα $f' \nearrow$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$, άρα υπάρχει μοναδικό ξ για το οποίο $f'(\xi) = 0$ και αφού f' θα είναι για κάθε $x < \xi$ $f'(x) < 0$ και για κάθε $x > \xi$ $f'(x) > 0$ άρα στο ξ η f θα παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f(\xi) = e^\xi + \xi^2 + \xi$.

ii. Για το ξ γνωρίζουμε ότι $f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow e^\xi + 2\xi + 1 = 0 \Leftrightarrow e^\xi = -1 - 2\xi$, άρα $f(\xi) = \xi^2 - \xi - 1$.

ΑΣΚΗΣΗ 57

i. Για κάθε $x > 0$ είναι $e^x > 1$ και $\eta\mu x \leq 1$, $\sigma\upsilon\nu x \leq 1$ άρα ισχύει το ζητούμενο.

ii. $f'(x) = g'(\eta\mu x - e^x)(\sigma\upsilon\nu x - e^x) > 0$, για κάθε $x > 0$ διότι από i. $\sigma\upsilon\nu x - e^x < 0$ και $\eta\mu x - e^x < 0$ και $g'(\eta\mu x - e^x) < \eta\mu x - e^x < 0$, άρα f ως συνεχής στο $[0, +\infty)$. Άρα ολικό ελάχιστο στο 0.

ΑΣΚΗΣΗ 58

α) $f(0) = 0$ και $f(x) > 0, \forall x \neq 0$ άρα $f(x) \geq f(0) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ οπότε η f παρουσιάζει Τ.Ε. στο $x_0 = 0$ και αφού f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και x_0 εσωτερικό σημείο από θ.fermat έχουμε $f'(0) = 0$ άρα το 0 είναι κρίσιμο σημείο.

β) $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα $f' \nearrow$ στο $\mathbb{R}$. Οπότε: $x > 0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(0) = 0 \Rightarrow f \nearrow$ στο $[0, +\infty)$. Επίσης $x < 0 \Leftrightarrow f'(x) < f'(0) = 0 \Rightarrow f \searrow$ στο $(-\infty, 0]$. Επίσης $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα f κυρτή στο $\mathbb{R}$

γ) $f'(\eta\mu x) \cdot f(x^2) = 0 \Leftrightarrow f'(\eta\mu x) = 0$ ή $f(x^2) = 0 \Leftrightarrow f'(\eta\mu x) = f'(0)$ ή $f(x^2) = f(0)$ και αφού f' είναι “1-1” και η f έχει από τα δεδομένα μοναδική ρίζα το 0 παίρνουμε: $\eta\mu x = 0$ ή $x^2 = 0$ άρα $x = \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$ ή $x = 0$ άρα $x = \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$

ΑΣΚΗΣΗ 59

i) Είναι $g'(x) = \dots = e^{-2x} (f'(x) - 2f(x))$ και $g''(x) = \dots = e^{-2x} (f''(x) - 4f'(x) + 4f(x))$

και αφού $f''(x) > 4(f'(x) - f(x)) \Leftrightarrow e^{-2x} (f''(x) - 4f'(x) + 4f(x)) > 0 \Leftrightarrow g''(x) > 0 \dots$

ii) Παρατηρείστε ότι από το Θ. Fermat προκύπτει ότι $f'(x_0) = 0$ άρα $f(x_0) = f'(x_0) = 0$

συνεπώς $g'(x_0) = 0$ (μοναδική ρίζα της g' γιατί από ερώτημα (i) είναι αύξουσα), άρα

	$-\infty$	x_0	$+\infty$	γν.
$g'(x)$	-	0	+	
g		$\searrow$	$\nearrow$	

$$g(x) \geq g(x_0) \Leftrightarrow e^{-2x} \cdot f(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0.$$

ΑΣΚΗΣΗ 60

Α' τρόπος

Έστω $h(x) = 3f(x) - 4f\left(\frac{3}{4}x\right)$, $x \in \mathbb{R}$ είναι $h'(x) = 3[f'(x) - f'\left(\frac{3}{4}x\right)]$, $x \in \mathbb{R}$. Όμως για κάθε

$x > 0$, $x > \frac{3}{4}x$ ενώ για κάθε $x < 0$, $x < \frac{3}{4}x$, άρα επειδή η $f'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα θα είναι για κάθε

$x > 0$, $h'(x) > 0$ ενώ για κάθε $x < 0$, $h'(x) < 0$, με $h'(0) = 0$. Άρα στο 0 η h παρουσιάζει ολικό ελάχιστο

Β' τρόπος

Διακρίνουμε περιπτώσεις αν $x > 0$ ή $x < 0$ και εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ στα διαστήματα που ορίζουν το 0, το x και το $\frac{3}{4}x$, εκμεταλλευόμενοι τη μονοτονία της f' , προκύπτει το ζητούμενο.

ΑΣΚΗΣΗ 61

i) Αν χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέσουμε ότι $x_1 < x_2$ τότε εφαρμόζοντας Θ.Μ.Τ. για την συνάρτηση

f σε καθένα από τα διαστήματα $\left[x_1, \frac{x_1 + x_2}{2}\right]$, $\left[\frac{x_1 + x_2}{2}, x_2\right]$ έπεται ότι θα υπάρχουν

$$\xi_1 \in \left(x_1, \frac{x_1 + x_2}{2}\right), \xi_2 \in \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, x_2\right) \text{ τέτοια ώστε } f'(\xi_1) = \dots = \frac{f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) - f(x_1)}{\frac{x_2 - x_1}{2}} \text{ και}$$

$$f'(\xi_2) = \dots = \frac{f(x_2) - f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)}{\frac{x_2 - x_1}{2}}. \text{ Αλλά η } f \text{ είναι κυρτή οπότε η } f' \text{ είναι γνησίως αύξουσα άρα}$$

$$\xi_1 < \xi_2 \Leftrightarrow f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \dots$$

ii) Η ζητούμενη σχέση λογαριθμίζοντας γίνεται

$$\ln(\alpha^\alpha \cdot \beta^\beta) > \ln\left[\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^{\alpha + \beta}\right] \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \ln\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) < \frac{\alpha \ln \alpha + \beta \ln \beta}{2} \Leftrightarrow f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) < \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}$$

όπου $f(x) = x \cdot \ln x$, η οποία εύκολα διαπιστώνουμε ότι είναι κυρτή άρα έχουμε απλή εφαρμογή του ερωτήματος (i).

ΑΣΚΗΣΗ 62

i. Θέτω $h(x) = \frac{f(x)\ln(x+1)}{x^2} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = h(x) \frac{x}{\ln(x+1)}$, άρα αφού $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\ln(x+1)} \stackrel{0/0}{\underset{DLH}{=}} \dots = 1$, τότε $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 4$

ii. Προφανώς για κάθε $x > 0$ είναι $f''(x) > 0$ ενώ για κάθε $x < 0$ είναι $f''(x) < 0$, άρα η f αλλάζει τα κοίλα εκατέρωθεν του 0. **Όμως από το ερώτημα I** η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0) = 4$ άρα η γραφική παράσταση της f δέχεται εφαπτόμενη στο $O(0,0)$. Οπότε το $O(0,0)$ είναι σημείο καμπής.

ΑΣΚΗΣΗ 63

i. Θέλουμε $f''(2) = 0$ και η $f''(x)$ να αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του 2. Είναι $f''(x) = \dots = 6x - 2\alpha$ οπότε $f''(2) = 0 \Leftrightarrow \dots \alpha = 6$. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του 2.

ii. Είναι $f'(x) = 3(x^2 - 4x + 1)$ με ρίζες τους αριθμούς $2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}$. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, 2 + \sqrt{3}]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\text{και} [2 - \sqrt{3}, +\infty)$. **Για τις ρίζες : Προσοχή!** Η άσκηση δίνει πεδίο ορισμού το $[1, +\infty)$ για να δούμε ότι $f(1) = 0$. Άρα δεν ψάχνουμε σύνολα τιμών και παραγοντοποιούμε την $f(x) = (x-1)(x^2 - 5x - 2) = 0, x \geq 1$ παρατηρώντας ότι έχει δύο ρίζες αφού η αρνητική απορρίπτεται. (Παρότι λόγω τοπικού μεγίστου στο 1 το 0, αντιμετωπίζεται και με σύνολα τιμών).

ΑΣΚΗΣΗ 64

Αφού η ευθεία $\varepsilon: y = 2x + 1$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x - 1] = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{(\alpha - 6)x^2 + (\beta - 1)x + 3}{3x - 1} \right] = 0$$

- Αν $\alpha \neq 6$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x - 1] = +\infty$ ή $-\infty$ (απορρίπτεται)
- Αν $\alpha = 6$ και $\beta \neq 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x - 1] \neq 0$ (απορρίπτεται)
- Αν $\alpha = 6$ και $\beta = 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x - 1] = 0$.

Ομοίως εργαζόμαστε αν η ευθεία $\varepsilon: y = 2x + 1$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

ΑΣΚΗΣΗ 65

Είναι $e^{-x} \leq x \cdot f(x) \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{xe^x} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$. Από κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Άρα ο άξονας $x'x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

ΑΣΚΗΣΗ 66

i. Θεωρούμε $g(x) = \ln x - x + 1, x > 0$. Είναι $f(1) = 0$ και $g'(x) = \frac{1-x}{x}, x > 0$προφανώς η f στο 1 παρουσιάζει ολικό μέγιστο το 0 άρα είναι το 1 και η μοναδική της ρίζα.

- ii. Από το i η f έχει πεδίο ορισμού το $(0,1) \cup (1,+\infty)$. Επειδή η f είναι συνεχής ψάχνουμε για κατακόρυφες ασύμπτωτες στο 0 και στο 1. Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x - x + 1} = \dots = 0$ άρα η $x = 0$ δεν είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη. Είναι $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\ln x - x + 1} = -\infty$ διότι από το i ο παρανομαστής μηδενίζεται στο 1 αλλά κοντά στο 1 είναι αρνητικός αφού η g έχει ολικό μέγιστο. Άρα η $x = 1$ είναι η μοναδική κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

ΑΣΚΗΣΗ 67

$$f'(x) = \frac{\ln x}{x}, x > 0 \quad f''(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

- i. Οπότε η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, e]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[e, +\infty)$.

- ii. Θεωρούμε $f(t) = \frac{\ln^2 t}{2}$, $t \in [x, x+1]$, $x > e$.

Από Θ.Μ.Τ. υπάρχει ξ ώστε $f(x+1) - f(x) = f'(\xi)$. Όμως f' στο $[e, +\infty)$ άρα $f'(x) > f'(\xi) > f'(x+1) \dots$

ΑΣΚΗΣΗ 68

- i. Αρκεί να υπάρχει $\alpha > 0$ ώστε $\begin{cases} \ln \alpha = \frac{\alpha^2}{2e} \\ \frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha}{e} \end{cases} \Leftrightarrow \dots \alpha = \sqrt{e}$. Οπότε στο κοινό τους σημείο $(\sqrt{e}, \frac{1}{2})$, θα έχουν κοινή εφαπτόμενη την (ε) : $y = \frac{1}{\sqrt{e}}x - \frac{1}{2}$.

- ii. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η f είναι κοίλη, $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ και η g κυρτή $g''(x) = \frac{1}{e}$, οπότε οι γραφικές τους παραστάσεις βρίσκονται εκατέρωθεν της κοινής τους εφαπτομένης. Δηλαδή, για κάθε $x > 0$ $\ln x \leq \frac{1}{\sqrt{e}}x - \frac{1}{2} \leq \frac{x^2}{2e}$, άρα $\ln x \leq \frac{x^2}{2e} \Leftrightarrow \ln x^{2e} \leq x^2 \Leftrightarrow x^{2e} \leq e^{x^2}$, προφανώς η ισότητα ισχύει μόνο για $x = \sqrt{e}$ από το ερώτημα i.

ΑΣΚΗΣΗ 69

- α) Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano προκύπτει ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 2)$. Όμως $f'(x) = -\frac{x+2}{x} < 0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα και η ρίζα είναι μοναδική.

$$\beta) g''(x) = \frac{2 - 2\ln x - x}{x^2} = \frac{f(x)}{x^2}.$$

$g''(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0$ (x_0 : η μοναδική ρίζα της f από το α) ερώτημα)

$g''(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0 \stackrel{f: \gamma\text{ν. φθίν.}}{\Leftrightarrow} x < x_0$ και $g''(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) < 0 \stackrel{f: \gamma\text{ν. φθίν.}}{\Leftrightarrow} x > x_0$. Άρα υπάρχει $x_0 \in (1, 2)$ στο οποίο η g παρουσιάζει καμπή.

ΑΣΚΗΣΗ 70

α) Εφαρμόζοντας Rolle για την f στο $[0, 1]$ παίρνω ότι υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$. Όμως f κοίλη στο $[0, 1]$ άρα η λύση μοναδική.

β) Για $x < x_0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(x_0) = 0$ (αφού f κυρτή) ομοίως για $x > x_0 \Leftrightarrow f'(x) < f'(x_0) = 0$

άρα η f γν. αύξουσα στο $[0, x_0]$ και γν. φθίνουσα στο $[x_0, 1]$

γ) Στο $(0, x_0)$ έχω: $x > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(0) = 0$ ενώ στο $(x_0, 1)$: $x < 1 \Leftrightarrow f(x) > f(1) = 0$ άρα $f(x) > 0 \forall x \in (0, 1)$

δ) Αν $\gamma < x$ τότε από Θ.Μ.Τ. για την f στο $[\gamma, x]$ υπάρχει $\xi \in (\gamma, x)$ ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x) - f(\gamma)}{x - \gamma}$

όμως $\gamma < \xi$ και η f' γν. φθίνουσα

άρα $f'(\gamma) > f'(\xi) \Leftrightarrow f'(\gamma) > \frac{f(x) - f(\gamma)}{x - \gamma} \Leftrightarrow f'(\gamma)(x - \gamma) + f(\gamma) > f(x)$ Ομοίως προκύπτει και αν

$\gamma > x$ κάνοντας Θ.Μ.Τ. στο $[x, \gamma]$.

ΑΣΚΗΣΗ 71

i. Είναι $f(x+1) - f(x) = [f(x+1) - 5(x+1)] - [f(x) - (5x+5)]$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - 5(x+1)] \stackrel{u=x+1}{=} \lim_{\substack{u \rightarrow +\infty \\ \text{ασυμπτωτή} \\ y=5x+6}} 6$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (5x+5)] = 1$

Άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)] = 5$

ii. Από Θ.Μ.Τ. στα $[x-1, x]$, $[x, x+1]$ υπάρχουν κ, λ : $f'(\kappa) = f(x) - f(x-1)$, $f'(\lambda) = f(x+1) - f(x)$.

Εφόσον f κυρτή $f'(\kappa) < f'(x) < f'(\lambda)$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - f(x-1)] \stackrel{u=x+1}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)] = 5$ άρα από κριτήριο παρεμβολής $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 5$.

ΑΣΚΗΣΗ 72

- i. Θα δείξουμε ότι η συνάρτηση $\varphi(x) = \ln x + x^2 - 2x$, $x > 0$ έχει μοναδική ρίζα. Είναι

$$\varphi'(x) = \dots = \frac{2x^2 - 2x + 1}{x} \stackrel{\Delta < 0}{> 0}, \text{ άρα η } \varphi \text{ είναι γνησίως αύξουσα. Το σύνολο τιμών της είναι το}$$

$$(\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)) = \dots \mathbb{R}. \text{ Αρά υπάρχει μοναδικό } x_0 \text{ ώστε } \varphi(x_0) = 0.$$

- ii. Θεωρούμε την συνάρτηση $d(x) = \sqrt{(x-2)^2 + \ln^2 x}$, $x > 0$. Είναι

$$d'(x) = \dots = \frac{\ln x + x^2 - 2x}{\sqrt{(x-2)^2 + \ln^2 x}} = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{(x-2)^2 + \ln^2 x}}. \text{ Από το προηγούμενο ερώτημα η } \varphi \text{ έχει μοναδική ρίζα}$$

το x_0 και είναι γνησίως αύξουσα άρα το ίδιο ισχύει και για την $d'(x)$. Οπότε για κάθε $x > x_0$, $d'(x) > 0$ ενώ για κάθε $0 < x < x_0$, $d'(x) < 0 \dots$ ισχύει το ζητούμενο.

- iii. Είναι $h(x) = \frac{1}{f(x) - g(x)} = \frac{1}{\ln x + x^2 - 2x} = \frac{1}{\varphi(x)}$, $x \in (0, x_0) \cup (x_0, +\infty)$ όπου αναφερόμαστε στην φ και

στο x_0 του πρώτου ερωτήματος. Η h είναι συνεχής άρα ψάχνουμε για κατακόρυφη ασύμπτωτη στο 0

και στο x_0 . Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln^2 x + x^2 - 2x} = \dots = 0$ άρα η $x = 0$ δεν είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη. Είναι

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{1}{\varphi(x)} = \dots = +\infty \text{ διότι το } x_0 \text{ είναι ρίζα της } \varphi, \text{ η οποία είναι και γνησίως αύξουσα, άρα η } \varphi(x) > 0 \text{ αν}$$

$x > x_0$ οπότε η $x = x_0$ είναι η μοναδική κατακόρυφη ασύμπτωτη.

- iv. Είναι για κάθε $t > 0$, $y'(t) = \frac{x'(t)}{x(t)} = 2 - x(t) \Leftrightarrow x'(t) = -x^2(t) + 2x(t)$ Την χρονική στιγμή t_0 είναι

$$x'(t_0) = -x^2(t_0) + 2x(t_0) = \ln x(t_0), \text{ αφού από το πρώτο ερώτημα } f(x_0) = g(x_0).$$