

Διαφορικός Λογισμός- II



Βασικά Θεωρήματα
Παραγώγων

Μελέτη Συνάρτησης

2.5

2.9

Δ. Βαμπούλης Φ. Γκάγκαρη, Χ. Γραϊκός, Κ. Ζέκιος Α. Ζησόπουλος, Γ. Θεοδωρόπουλος,
Π. Ίσσαρης, Φ. Καλογεροπούλου, Γ. Καλούτσας, Ν. Καντεράκης, Κ. Καρδαράκος,
Π. Λιναρδάκης, Α. Μαλάμου, Ν. Μπέντα, Π. Νικολέλλης, Β. Ντούσης,
Α. Παπαβασιλείου, Π. Παπαθανασίου, Α. Σούλη, Μ. Τσιλιπιδής, Γ. Χρονόπουλος.

Συντονισμός Μαθηματικών

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + \beta, & \text{αν } -1 \leq x < 0 \\ \gamma x^2 + 4, & \text{αν } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$. Να βρείτε τα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε να εφαρμόζεται για την f το Θεώρημα Rolle στο διάστημα $[-1, 1]$.
2. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta \mu x}{x}, & x < 0 \\ x \cdot \eta \mu x, & 0 \leq x \leq \pi \\ \frac{\eta \mu(\pi - x)}{x - \pi}, & x > \pi \end{cases}$
 - i. Να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο 0 και στο π .
 - ii. Να εξετάσετε αν η f πληροί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[0, \pi]$.
 - iii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{\epsilon \phi x}{x} = -1$ έχει μια τουλάχιστο ρίζα στο $(0, \pi)$.
3. Δίνεται η συνάρτηση f , συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) , με $\alpha < \beta < 0$ και $\alpha f(\beta) = \beta f(\alpha)$.
 - i. Να αποδείξετε ότι για την συνάρτηση F με $F(x) = \frac{f(x)}{x}$ ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[\alpha, \beta]$.
 - ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $A(\xi, f(\xi))$ της C_f με $\alpha < \xi < \beta$ στο οποίο η εφαπτόμενη να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \epsilon$ με $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon \in \mathbb{R}$. Αν ισχύει $\frac{\alpha}{5} + \frac{\beta}{4} + \frac{\gamma}{3} + \frac{\delta}{2} + \epsilon = 0$, να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$.
5. Δίνεται μια συνάρτηση f με $f'(x) \neq 2x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x^2 - x$ έχει το πολύ μια πραγματική ρίζα.
6. Έστω f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(1) \cdot f(2) < 0$ και $f(3) \cdot f(2) < 0$. Να δείξετε ότι σε ένα τουλάχιστον σημείο η γραφική της παράσταση δέχεται οριζόντια εφαπτόμενη.
7. Έστω μια συνάρτηση f , δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[1, 2]$ με $f(2) = 2f(1)$ και $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (1, 2)$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x \cdot f'(x)$ έχει μοναδική ρίζα στο $(1, 2)$.
8. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι :
 - i) $\frac{\alpha - \beta}{\sin^2 \beta} \leq \epsilon \phi \alpha - \epsilon \phi \beta \leq \frac{\alpha - \beta}{\sin^2 \alpha}$, αν $0 < \beta \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$, ii) $\ln\left(\frac{\pi^\pi}{3^3}\right) > 2\pi - 6$
 - iii) $1 - \frac{\alpha}{\beta} < \ln \beta - \ln \alpha < \frac{\beta}{\alpha} - 1$, αν $0 < \alpha < \beta$, vi) $|\sin \beta - \sin \alpha| \leq |\beta - \alpha|$, αν $\alpha < \beta$
9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$ συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f(\alpha) = \beta$ και $f(\beta) = \alpha$. Να αποδείξετε ότι :
 - i. Υπάρχει $\gamma \in (\alpha, \beta)$ με $f(\gamma) = \gamma$.
 - ii. Υπάρχουν $\rho, \sigma \in (\alpha, \beta)$ με $f'(\rho) \cdot f'(\sigma) = 1$.

10. Έστω f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,3]$ με για την οποία ξέρετε ότι $f(3) = f(0) - 1$ και $f'(3) = -\frac{1}{3}$.
Να δείξετε ότι υπάρχει ξ στο $(0,3)$ με $f''(\xi) = 0$.
11. Έστω f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(5) = 3$, $f(7) = 7$, $f(12) = 17$, $f(14) = 21$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f''(x) = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $\mathbb{R}$.
12. Αν f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η $f'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα να δείξετε ότι για κάθε x ισχύει $f(x) < \frac{f(x-1) + f(x+1)}{2}$.
13. Θεωρούμε συνάρτηση f παραγωγίσιμη και με συνεχή παράγωγο στο $[1,2]$. Δίνεται ότι για την f ισχύουν ότι: $f(1) = f(2) - \frac{7}{3}$ και $f'(1) > 4$. Να αποδείξετε ότι:
i. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = x_0^2$.
ii. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 4\xi$.
14. Να βρείτε την παραγωγίσιμη f , ορισμένη στα αντίστοιχα διαστήματα, αν ξέρετε ότι:
i. $f'(x) = \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ και $f(0) = 2$
ii. $f''(x) = 6x + 2$, $x \in \mathbb{R}$ και $f'(0) = 1$, $f(1) = -3$
iii. $f'(x) = \frac{2x - x^2}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 3$
15. Να βρείτε την παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:
i. $f'(x) + f(x) = 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$
ii. $f'(x) + 2f(x) = 3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$
iii. $2f'(x) - 3f(x) = 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$
iv. $f'(x) - 2xe^{-f(x)} = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(1) = 1$
16. Να βρείτε τη συνάρτηση f , αν ξέρετε ότι είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$, περιττή και ισχύει:
 $xf'(x) = 3x^3$, $x \neq 0$ με $f(1) = 1$.
17. Οι συναρτήσεις f, g , έχουν συνεχείς παραγώγους στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = g(x)$ και $g'(x) = -f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι:
i. Υπάρχουν f'', g'' συνεχείς στο $\mathbb{R}$,
ii. $f''(x) + f(x) = g''(x) + g(x) = 0$ για κάθε πραγματικό x ,
iii. Η συνάρτηση $h(x) = f^2(x) + g^2(x)$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$,
iv. Αν α, β είναι ρίζες της f με $f(x) \neq 0$ για κάθε x στο (α, β) τότε η g έχει ακριβώς μία ρίζα στο (α, β) .
18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)$, $x \in [1,10]$, παραγωγίσιμη στο $(1,10)$ για την οποία ισχύει $x \cdot f'(x) + f(x) = e^x$ για κάθε $x \in (1,10)$ και $f(2) = e^2$. Να βρείτε τους δυνατούς τύπους της f .

19. Η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ με $f'(1) = 1$ και $f(x \cdot y) = xf(y) + yf(x)$ για κάθε $x, y > 0$. Να δείξετε ότι :

i. $f'(x) = 1 + \frac{f(x)}{x}$ για κάθε $x > 0$.

ii. $f(x) = x \cdot \ln x$, $x > 0$.

20. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - |x^2 - 4x|$ ως προς τη μονοτονία.

21. i. Να μελετήσετε τη μονοτονία της $f(x) = \alpha^x - x$, $\alpha \in (0, 1)$.

ii. Αν $\alpha \in (0, 1)$ να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ που ικανοποιούν τη σχέση:

$$\alpha^{\lambda^2-4} - \alpha^{\lambda-2} = (\lambda^2 - 4) - (\lambda - 2).$$

22. i. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την f με $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x$, $x \in \mathbb{R}$.

ii. Να λύσετε την ανίσωση $(3^{x-1} + 4^{x-1}) \cdot 5^{1-2x} < (3^{1-2x} + 4^{1-2x}) \cdot 5^{x-1}$

23. i. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln(x-1)}{\ln x}$ με $x > 2$.

ii. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $2 < \alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι $(\alpha - 1)^{\ln \beta} < (\beta - 1)^{\ln \alpha}$.

24. Να προσδιορίσετε το πλήθος των πραγματικών λύσεων των παρακάτω εξισώσεων :

i. $x^3 + x + 3 = 0$

ii. $x^3 - 6x = 4\sqrt{2}$

iii. $x^3 + 10 = 12x$

iv. $\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x = 1$

v. $3x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 24x = \frac{1}{2}$

25. Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $3^x + 4^x = 7^x$

ii. $e^{|x|} - e^2 = |x| - 2$

iii. $x^2 + x + \ln x = 2$

26. Στις παρακάτω συναρτήσεις να βρείτε τα κρίσιμα σημεία τους. Μετά να τις μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατά τους:

i. $f_1(x) = x^2 + 2\sin x$, $x \in (-\pi, \pi)$

ii. $g_1(x) = \frac{x^2}{x-1}$, $x \in \mathbb{R} - \{1\}$

iii. $f_2(x) = x \ln x - \frac{x^2}{2}$, $x > 0$

iv. $g_2(x) = xe^{\frac{1}{x^2}}$, $x \in \mathbb{R}^*$

v. $g_3(x) = x + 2\sqrt{2-x}$, $x \leq 2$

27. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία, τα τοπικά και ολικά ακρότατα τις συναρτήσεις:

i. h με $h(x) = \begin{cases} e^x - x, & x \in [-\ln 2, 0] \\ 1, & x \in (0, 1) \\ x^3 - 6x^2 + 6, & x \in [1, 2] \end{cases}$

ii. $f(x) = e^x - x$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$, $x \in \mathbb{R}$

iii. $g(x) = \frac{|x+1|}{\sqrt{x^2+1}}$, $x \in \mathbb{R}$

28. i. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα τη συνάρτηση:

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5\alpha^2, \alpha \in \mathbb{R}.$$

- ii. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$ όταν το α διατρέχει το $\mathbb{R}$.

29. Να βρεθεί το σύνολο τιμών των συναρτήσεων:

i. $f(x) = |x^2 - 4x|, x \in [-1, 5]$ ii. $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$

30. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{1+f^2(x)}, 0 \leq x \leq 3$, όπου f παραγωγίσιμη στο $[0, 3]$ συνάρτηση με

$f(1) = -1, f(2) = 1$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, 3]$. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση g και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

31. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x + \ln x - 1, x > 0$.

- i. α) Να βρεθούν οι ρίζες, το πρόσημο και το σύνολο τιμών της f .

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $x = e^{\lambda+1-x}$ έχει μοναδική ρίζα για κάθε πραγματικό λ .

- ii. α) Να δείξετε ότι $x^2 + 2x \ln x - 4x \geq -3$ για κάθε $x > 0$.

β) Αν η συνάρτηση g ορίζεται και είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, με $g(x) > 0$ και ισχύει:

$$e^{g(x)} + g(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 \ln x - \frac{5}{2}x^2 + 4x + c, c \in \mathbb{R}, x > 0, \text{ να δείξετε ότι η } g \text{ δεν έχει}$$

κρίσιμα σημεία και να λύσετε την ανίσωση $g(x^2 + g(x)) > g(x^2 + g(x^2))$.

32. Έστω συνάρτηση f με $f(x) = x^\alpha \cdot e^{2\alpha-x}, x > 0, \alpha > 0$

- i. Να μελετήσετε την f ως προς τα ακρότατα.

- ii. Να βρείτε το α για το οποίο η μέγιστη τιμή της f παίρνει την ελάχιστη τιμή της.

33. Για μια συνάρτηση f , που είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, ισχύει ότι:

$$f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ όπου } \beta, \gamma \text{ πραγματικοί αριθμοί με } \beta^2 < 3\gamma.$$

- i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα.

- ii. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

- iii. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα $(0, 1)$.

34. Να λύσετε την ανίσωση $\eta_{\mu x} > x \cdot \sigma_{\mu x}, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

35. Να δείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $\eta_{\mu x} < 2x$ και $\eta_{\mu x} > x - \frac{x^3}{3}$.

36. Να αποδείξετε τις παρακάτω ανισότητες:

i. $6x^2 \ln x + 6x \leq 2x^3 + 3x^2 + 1$ για κάθε $x > 0$.

ii. $e^x \geq 1 + x + \frac{1}{2}x^2$ για κάθε $x \geq 0$.

37. Έστω f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,2]$, με $f(0) = f(1) = f(2) = 0$ και $f(x) \geq 0$ για κάθε x που ανήκει στο $[0,2]$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f''(x) = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $(0,2)$.
38. Έστω f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) = f(\beta)$. Να δείξετε ότι η f έχει ένα τουλάχιστον κρίσιμο σημείο στο (α, β) .
39. Δίνεται ότι η $f(x)$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, και επιπλέον ισχύει ότι $f(x)(e^x - x) \leq x^5 + x^2$ με $f(0) = 0$. Να αποδείξετε ότι $f'(0) = 0$.
40. i. Να βρείτε τα ακρότατα της $f(x) = \frac{e^x}{x^v}$, $x > 0$, $v \in \mathbb{N}^*$.
- ii. Να δείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $e^x \geq \left(\frac{xe}{v}\right)^v$, $v \in \mathbb{N}^*$.
- iii. Αν $\alpha^x \geq \left(\frac{\alpha x}{v}\right)^v$ για κάθε $x > 0$ να δείξετε ότι $\alpha = e$.
41. Να μελετήσετε ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής τις συναρτήσεις :
- i. f με $f(x) = xe^{-vx}$, $v \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$ ii. g με $g(x) = x^3 - \frac{3}{2}\alpha x^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$
- iii. h με $h(x) = \begin{cases} e^x - x, & x \leq 0 \\ x^2 + 1, & x \in (0,1) \\ x^3 - 6x^2 + 7, & x \geq 1 \end{cases}$
42. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \left(\frac{1-\alpha}{3}\right) \cdot x^3 - x^2 + (\alpha-1) \cdot x - \frac{1}{3}$, $x \in [0, +\infty)$.
- A. Να αποδείξετε ότι η μοναδική τιμή του α για την οποία υπάρχει ακρότατο στο $x_0 = 1$ είναι $\alpha = 3$.
- Για $\alpha = 3$:
- B. i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την καμπυλότητα και τα σημεία καμπής.
- ii. Να δείξετε ότι η f έχει ακριβώς δύο ρίζες στο πεδίο ορισμού της.
- iii. Να δείξετε ότι $f(x) \leq e^x + 1$ για κάθε $x \geq 0$.
43. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x$, $g(x) = -x^2 - x$ ορισμένες στο $\mathbb{R}$.
- i. Να τις μελετήσετε ως προς τα κοίλα και να δείξετε ότι η ευθεία $y = x + 1$ είναι κοινή τους εφαπτόμενη.
- ii. Να δείξετε ότι για κάθε πραγματικό x : $e^x + x^2 + x > 0$.

44. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = -\ln(\ln x)$.
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να τη μελετήσετε ως προς την κυρτότητα.
 - Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = e$.
 - Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 1$ ισχύει ότι $\ln x^e \leq e^{\frac{x}{e}}$. Για ποια τιμή του x ισχύει η ισότητα στη προηγούμενη σχέση;
 - Να αποδείξετε ότι αν $1 < \alpha < \beta$, τότε $\ln \frac{\alpha + \beta}{2} > \sqrt{\ln \alpha \cdot \ln \beta}$.
45. Να μελετήσετε ως προς τις ασύμπτωτες τις συναρτήσεις:
- $f(x) = x \cdot e^x, x \in \mathbb{R}$
 - $g(x) = x - \ln x, x > 0$
 - $h(x) = \frac{\eta \mu x}{x^3 + x}$
46. Αν η ευθεία $y = x + 3$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ να βρείτε το $\mu \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1} \cdot f(x) + 2\mu x^2 + 3}{x^2 \cdot f(x) - x^3 + \sqrt{x^4 + 1}} = 4$.
47. Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι είναι παραγωγίσιμη και ισχύουν επίσης $f(0) = f(1) = 0$ και $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Να δείξετε ότι:
- Υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$.
 - Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, 1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0, x_0]$.
 - $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$.
48. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[1, e]$ με σύνολο τιμών το $[-1, 4]$ και $f(1) = 2, f(e) = e + 1$. Να αποδείξετε ότι:
- Υπάρχουν $x_1, x_2 \in (1, e)$ με $x_1 \neq x_2$ τέτοια ώστε $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$.
 - Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, e)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)[f'(x_0) - 4f^4(x_0)] = x_0$.
49. Δίνεται μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και οι πραγματικοί αριθμοί α, β με $\alpha < \beta$. Αν ισχύει ότι $f(\alpha) = f(\beta)$ και ότι η f είναι κοίλη, τότε να αποδειχθεί ότι για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ ισχύει ότι $f(x) > f(\alpha)$.
50. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - \alpha^2}{2\alpha x} - \ln x + \ln \alpha, \alpha > 0$.
- Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.
 - Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - \alpha^2 = 2\alpha x(\ln x - \ln \alpha)$.
 - Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .
 - Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
 - Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και να βρείτε τα σημεία καμπής.
 - Αν $0 < \alpha < \beta$ να δείξετε ότι $\ln \frac{\alpha}{\beta} > \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha\beta}$.

51. Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f'(x) = \frac{3 \cdot 2^x + 1}{2^x + 1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση: $g(x) = f(x) - 3x$.
- Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $y=3x$ το πολύ σε ένα σημείο.
- Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.
- Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x))$.

52. Δίνεται η συνάρτηση f που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[1, 4]$, με σύνολο τιμών το $[-2, 5]$. Αν επιπλέον ισχύουν: $f(1) = 3$, $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) \cdot \ln(x-3)}{(x-4)^2} = 2$ και η $f''(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, 4]$ τότε:

- Να δείξετε ότι $f(4) = 0$.
- Να δείξετε ότι υπάρχουν $\kappa, \lambda \in (1, 4)$ ώστε: $f'(\kappa) = f'(\lambda) = 0$.
 - Υπάρχει μοναδικό σημείο καμπής της C_f στο διάστημα $(1, 4)$.
- Να δείξετε ότι υπάρχει σημείο $A(x_0, f(x_0))$, $x_0 \in (1, 4)$ έτσι ώστε η κλίση της C_f στο A να ισούται με την τιμή $f(x_0)$.

β. Για το x_0 του προηγούμενου ερωτήματος, να δείξετε ότι: $f''(4) > \frac{2 - f(x_0)}{4 - x_0}$.

53. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^{1/x} & \text{αν } x > 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

- Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της f .
- Να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{4}$, $\sqrt[5]{5}$.
- Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης.
- Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = x$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f .

Συμπληρωματικές ασκήσεις για εξάσκηση και εμπόθυνση

- Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1) \cdot \ln(x+1)$. Να αποδείξετε ότι :
 - Η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$.
 - Η εξίσωση $(x+1)^{x+1} = e^{1-x}$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$.
- Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ και ισχύουν $f(\alpha) = f(\beta)$ και $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$ να δείξετε ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον κρίσιμα σημεία της f' στο (α, β) .
- Δείξτε ότι η εξίσωση $x^3 + x = 1$ έχει μία μόνο ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ έστω ρ .
 Στη συνέχεια αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in \left(\frac{1}{2}, \rho\right)$ έτσι ώστε $\text{syn}\xi = \frac{1-2\xi}{\xi(\xi^2-1)}$.
- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $16x^3 + 12\beta x^2 - 6\gamma x = 4\beta - 3\gamma + 4$ ($\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ με $\beta^2 + 2\gamma < 0$), έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.
- Έστω ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $\alpha^{f(\beta)} = \beta^{f(\alpha)}$ με $1 < \alpha < \beta$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \xi \cdot f'(\xi) \cdot \ln \xi$.
- Θεωρούμε συνάρτηση f συνεχή στο $[\alpha, \beta]$ παραγωγίσιμη στο (α, β) με $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$. Αν $f(\alpha) \text{syn}\beta = f(\beta) \text{syn}\alpha$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f'(x)}{\epsilon\phi x} = -f(x)$ έχει μια τουλάχιστο ρίζα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
- Έστω $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \eta\mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.
 - Να αποδείξετε ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την f στο $\left[0, \frac{1}{\pi}\right]$
 - Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in \left(0, \frac{1}{\pi}\right)$ ώστε $\sigma\phi \frac{1}{\xi} = 2\xi$.
- Έστω f, g συναρτήσεις συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμες στο (α, β) με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Αν είναι $g(\alpha) - g(\beta) = \ln \frac{f(\alpha)}{f(\beta)}$ να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $\frac{f'(x_0)}{f(x_0)} = g'(x_0)$.
- Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και τέτοια ώστε $f(k+1) = f(k) + 1$ για κάθε ακέραιο αριθμό k . Αν είναι $g(x) = f(x) - \ln(\alpha + x)$, $x > -\alpha$ με $\alpha > 0$ τότε :
 - Να οριστεί ο αριθμός α ώστε για την g να εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο $[0, 1]$.
 - Για τον αριθμό α που βρήκατε στο (α) ερώτημα, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιος ώστε $f'(x_0) = \frac{e-1}{1+(e-1)x_0}$.

10. Έστω $\alpha < \beta < \gamma$ διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Αν $f(\alpha)$, $f(\beta)$ και $f(\gamma)$ είναι και αυτοί διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει ξ στο $\mathbb{R}$ με $f''(\xi) = 0$.
11. Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $2f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = f(\alpha) + f(\beta)$, $\alpha < \beta$ να αποδείξετε ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός $x_0 \in (\alpha, \beta)$, τέτοιος ώστε $f''(x_0) = 0$.
12. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[0, 1]$ παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ με $f(0) = \alpha$, $\alpha > 0$ και $f(1) = 0$. Να αποδείξετε ότι:
- Υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, 1)$ ώστε $f(x_0) = \alpha \cdot x_0$
 - Υπάρχουν $x_1, x_2 \in (0, 1)$ ώστε $f'(x_1) \cdot f'(x_2) = \alpha^2$
 - Οι εφαπτόμενες της C_f στα σημεία με τετμημένες x_1 και x_2 δε μπορεί να είναι κάθετες.
13. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[4, 40]$ και παραγωγίσιμη στο $(4, 40)$. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $A(4, 500)$ και $B(40, 518)$, να αποδείξετε ότι:
- Υπάρχουν $x_1, x_2 \in (4, 40)$ ώστε $f'(x_1) + f'(x_2) = 1$.
 - Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (4, 40)$ ώστε $f'(\xi_1) + 2f'(\xi_2) + 3f'(\xi_3) = 3$.
14. Να αποδείξετε ότι: $-1 < \ln\left(\frac{e^2 - 1}{2e}\right) < 1$.
15. Αν η f είναι παραγωγίσιμη και η f' είναι συνάρτηση "1-1", να δείξετε ότι η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f σε οποιοδήποτε σημείο, δεν έχει κανένα άλλο κοινό σημείο με την γραφική παράσταση εκτός του σημείου επαφής
16. Έστω οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha < \beta < \gamma$ και η συνάρτηση f που είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Αν τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha)), B(\beta, f(\beta)), \Gamma(\gamma, f(\gamma))$ είναι συνευθειακά, να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \mathbb{R}$ με $f''(\xi) = 0$.
17. Έστω f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο. Αν α, β πραγματικοί αριθμοί με $\alpha < \beta$ ώστε να ισχύουν $f(\alpha) > \alpha$, $f(\beta) > \beta$ και $f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) < \frac{\alpha + \beta}{2}$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ στο (α, β) με $f'(\xi) = 1$.
18. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[-1, 1]$ με $f(0) > \frac{f(-1) + f(1)}{2}$. Να δείξετε ότι η f' δεν είναι γνησίως αύξουσα.
19. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ με $f(0) = 0$. Αν $1 \leq f'(x) \leq 2$ για κάθε $x > 0$, να δείξετε ότι $x \leq f(x) \leq 2x$ για κάθε $x \geq 0$.
20. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ με $f(0) = 0$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$. Να δείξετε ότι:
- Υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = (1 - \xi) \cdot f'(\xi)$.
 - Υπάρχει $x_0 \in (0, \xi)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) < \frac{f'(\xi)}{\xi}$.

21. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[α, β]$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(α,β)$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο. Αν $f(α)=f(β)=0$ και υπάρχουν $γ, δ$ στο $(α,β)$ ώστε $f'(γ) \cdot f'(δ) < 0$ να δείξετε ότι:
- Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο $(α,β)$,
 - Υπάρχουν $ξ_1, ξ_2$ που να ανήκουν στο $(α,β)$ ώστε $f''(ξ_1) \cdot f''(ξ_2) < 0$ και
 - Υπάρχει $ξ$ στο $(α,β)$ ώστε $f''(ξ) = 0$.

22. Να βρείτε τη συνάρτηση f για την οποία $f(1)=0$ και $f'(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x+1}, & x > 0 \end{cases}$

23. Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση f , που ορίζετε σε καθένα από τα παρακάτω διαστήματα :

i. $x^2 \cdot f'(x) + e^{-f(x)} = 0, x \in (0, +\infty)$ και $f(1) = 0$

ii. $x \cdot f'(x) = \frac{1}{x^2} - 2f(x), x \in (0, +\infty)$ και $f(1) = 0$

iii. $f'(x) - 1 = \frac{f(x)}{x}, x \in \mathbb{R}^*$ και $f(-1) = 2f(1) = 1$.

iv. $f'(x) + 2xf(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$.

v. $f'(x) = e^{x-f(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$.

24. Θεωρούμε συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε $f(x) - 2f'(x) + f''(x) = e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $g(x) = f'(x) - f(x)$ και $g(0) = 1$ τότε :

i. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $h(x) = \frac{g(x)}{e^x} - x$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

ii. Αν $f(0) = 1$ να βρεθεί η συνάρτηση f .

25. Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) - 2f(-x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f^2(x) + f^2(-x)$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$. Αν $f(0) = 4$ να βρείτε τον τύπο της g .

26. Να βρείτε την παραγωγίσιμη, στο $\mathbb{R}$, συνάρτηση f για την οποία ισχύουν $f(0) = 1$ και

$$\frac{1}{f(x)} + \frac{1}{f'(x)} = \frac{2}{e^x} \text{ με } f(x) \cdot f'(x) \neq 0 \text{ για κάθε πραγματικό } x.$$

27. Να βρείτε την παραγωγίσιμη στο $[0, \frac{\pi}{2})$ f , για την οποία ξέρετε ότι:

$$f'(x) \cdot \sin x + f(x) \cdot \eta\mu x = f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x \text{ και } f(0) = 560.$$

28. α) Να βρείτε την παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ f για την οποία ξέρετε ότι: $f(x) > 0$ και $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{3}$, $f(0) = 0,1$.

β) Μετά από μία σειρά ανεπιθύμητων παρενεργειών κατά την διαδικασία κλωνοποίησης μιας τσιπούρας, γεννήθηκε τσιπούρα σχήματος κυλινδρικού, σταθερού ύψους $0,1 \mu$ και τέτοια ώστε σε κάθε χρονική στιγμή (t ημέρες) ο ρυθμός μεταβολής της παράπλευρης επιφάνειας να είναι ίσος με το ένα τρίτο της παράπλευρης επιφάνειας

- Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του όγκου της τσιπούρας όταν η ακτίνα της βάσης θα είναι $0,2 \mu$.
- Σε ποια ηλικία η τσιπούρα θα αποκτήσει ακτίνα βάσης $0,4 \mu$ αν κατά την γέννηση της η ακτίνα ήταν μόλις $0,1 \mu$;

29. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x)$, $x > -1$ με την ιδιότητα $f'(x^2 + 2x + 1) = x + 3$. Αν $f(0) = 4$, να βρείτε το $f(1)$.
30. Να βρείτε την παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f , για την οποία ισχύει: $2f'(x) \cdot f(x) = e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = -4$.
31. i. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση: $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$
 ii. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα την $f(x) = x\sqrt{16 - x}$, $x \in (-\infty, 16]$.
32. i. Να λύσετε την εξίσωση $\ln x + 2x = 2$.
 ii. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $f(x) = \frac{2x - \ln x}{2\sqrt{x}}$.
 iii. Για κάθε $x > 1$, να δείξετε ότι $\ln \sqrt{x} < x - \sqrt{x}$.
33. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x) + f(x) = e^{1-x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 i. Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία.
 ii. Να λύσετε την ανίσωση $f(\eta\mu^2 x) > f(x^2)$ στο $\mathbb{R}$.
34. Έστω f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με f' συνεχή και $f(0) = 0$. Αν για κάθε πραγματικό x ισχύει:
 $f^2(x) + f(x) = x^3 + e^x - 1$, τότε:
 i) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
 ii) Να μελετήσετε την f ως προς το πρόσημο της.
35. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^{\alpha x}}{x^2 + \alpha^2}$, $\alpha \neq 0$.
 i. Να βρείτε το πλήθος των τοπικών ακροτάτων της f .
 ii. Αν $\alpha \leq -1$, δείξτε ότι για κάθε $x \geq 0$ ισχύει $e^{\alpha x} \leq 1 + \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2$.
36. i. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $f(x) = x^x$, $x > 0$.
 ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 2$, ισχύει $x^x > (x-1)^{x-1}$.
37. i. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης f με $f(x) = \ln x - x + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
 ii. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του α για την οποία ισχύει $\ln x \leq x - \alpha$ για κάθε $x > 0$.
 iii. Για την τιμή του α που βρήκατε να αποδείξετε ότι η ευθεία $(\varepsilon): y = \alpha x - 1$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = \ln x$ και ότι η ευθεία (ε) και η C_g έχουν μοναδικό κοινό σημείο το σημείο επαφής.
38. Να μελετήσετε ως προς τα ακρότατα τη συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2(x-2)^2}$, $x \in [0, 4]$.
39. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $[1, e]$ με $0 < f(x) < 1$ και $f'(x) \geq 0$ για κάθε x που ανήκει στο $[1, e]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μόνο ένας $x_0 \in (1, e)$ τέτοιος ώστε να ισχύει: $f(x_0) + x_0 \ln x_0 = x_0$.

40. Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της f .
- Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της $f(x) = 0$ όταν $\alpha \in (-28, -27)$.
- Αν x_1, x_2 είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων της f , να βρείτε το α , ώστε τα σημεία $O(0,0)$, $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ να είναι συνευθειακά.

41. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{x+1}{x}\right)^{x+1}$ $x > 0$

- Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.
- Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- Να βρείτε το πλήθος λύσεων της εξίσωσης $\left(\frac{1}{x} + 1\right)^x = \frac{\lambda x}{x+1}$, $x > 0$ για τις διάφορες τιμές του πραγματικού λ .
- Αν για την συνάρτηση g ορισμένη και παραγωγίσιμη για $x > 0$, ξέρετε ότι $g'(x) > 1$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - x - 1}{x \ln x} = 0$ να δείξετε ότι $\left(\frac{1+g(x)}{g(x)}\right)^{g(x)+1} < \left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{x+2}$ για κάθε $x > 0$.

42. Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και συνεχής στο 0 , με $f(0) = 0$.

- Να δείξετε ότι και η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x > 0$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$.
- Να δείξετε ότι $g'(x) = \frac{1}{x} \left(f'(x) - \frac{f(x)}{x} \right)$.
- Αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ να δείξετε ότι και η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

43. Αν $\alpha^x + \beta^x + \gamma^x \geq 2 + \sin x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με $\alpha, \beta, \gamma \in (0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι $\alpha\beta\gamma = 1$.

44. Δίνονται συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με $f(\alpha) = 1$, $g(\alpha) = 0$ και $\frac{(g(x))^2 + 1}{f(x)} \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f'(\alpha) = 0$.

45. Έστω f συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ για την οποία ξέρετε ότι :

$$f(0) = 0, f(1) = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = -1, \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x \cdot (f(x) - 1)}{(x-1)^2} = 1$$

- Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στα σημεία 0 και 1 και ισχύει $f'(0) = -1$, $f'(1) = 1$.
- Να δείξετε ότι τα σημεία 0 και 1 είναι θέσεις τοπικών μεγίστων της f .
- Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ έτσι ώστε $f'(\xi) = 0$.

46. Έστω f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $[2, +\infty)$.
Αν $f([-1, 1]) = [4, 5]$ και $f(-1) = 4,6$ και $f(1) = 4,8$ να δείξετε ότι η εξίσωση $f''(x) = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $\mathbb{R}$.
47. Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
 $f(x+1) = f(3-x)$ και $f''(x) \neq 0$.
- Να λύσετε την εξίσωση $f'(x) = 0$.
 - Αν η f'' είναι συνεχής στο $[0, 3]$ και ισχύει $f(0) < f(1)$ να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τις θέσεις των ολικών ακροτάτων στο $[0, 3]$.
48. Μια βιομηχανία παράγει x ποσότητα από ένα προϊόν με κόστος που δίνεται από τη συνάρτηση
 $K(x) = \frac{\alpha}{4}x^3$ όπου $x \in (0, +\infty)$ και $\alpha \in \left[\frac{2}{9}, \frac{9}{2}\right]$. Τα έσοδα από την πώληση ποσότητας x του προϊόντος
δίνονται από τη συνάρτηση $E(x) = x^2$, $x > 0$ και το κέρδος δίνεται από τη συνάρτηση
 $f(x) = E(x) - K(x)$, $x > 0$.
- Να βρείτε την ποσότητα x_0 για την οποία έχουμε το μέγιστο κέρδος το οποίο συμβολίζουμε με $M(\alpha)$.
 - Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \left[\frac{2}{9}, \frac{9}{2}\right]$ για την οποία το $M(\alpha)$ γίνεται μέγιστο καθώς και το μέγιστο αυτό κέρδος.
49. Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f με $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η
συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}, & \text{αν } x \neq 1 \\ f'(1), & \text{αν } x = 1 \end{cases}$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
50. Θεωρούμε τη παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f^3(x) + 3f(x) = x$, για κάθε
 $x \in \mathbb{R}$.
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημό της.
 - Να μελετήσετε την f ως προς τη κυρτότητα και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της.
 - Αν $0 < \alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι ο συντελεστής διευθύνσεως της ευθείας AB , όπου A και B είναι τα άκρα της C_f στο $[\alpha, \beta]$, είναι μικρότερος από το συντελεστή διευθύνσεως της ευθείας που διέρχεται από το $A(\alpha, f(\alpha))$ και την αρχή των αξόνων.
51. Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη για την οποία ισχύουν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 3x}{x - 1} = 2$ και $f(2) = 3$.
- Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$.
 - Αν η f είναι κοίλη να δείξετε ότι:
 - $2 - 5x + f(x) \leq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 - Υπάρχει ένα σημείο $x_0 \in (1, 2)$ στο οποίο η f παρουσιάζει μέγιστο.

52. α) Να δείξετε ότι $e^x > 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^x - \frac{x^3}{3} - 1$.

i. Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή.

ii. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$ και να δείξετε ότι : $e^x \geq \frac{x^3}{3} + x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

53. Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν τα α και β είναι θέσεις ακροτάτων της f με $\beta > \alpha$, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = \left(\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} \right)^2$.

54. Δίνεται ο πραγματικός αριθμός α και η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^4 + \alpha x^3 + 6x^2 - 17x + 2004$ με $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές του α , για τις οποίες η f στρέφει τα κοίλα άνω στο πεδίο ορισμού της.

55. Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε η συνάρτηση $f(x) = x^3 + (\alpha - 1)x^2 - \beta x + 1$ να έχει σημείο καμψής στο $x_1 = 3$ και τοπικό μέγιστο στο $x_2 = -1$.

56. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^2 + x$, $x \in \mathbb{R}$.

i. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό ξ στο οποίο να παρουσιάζει ακρότατο και ότι το ξ είναι θέση ολικού ελαχίστου.

ii. Για το ξ του προηγούμενου ερωτήματος να δείξετε ότι $f(\xi) = \xi^2 - \xi - 1$.

57. i. Να δείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει: $\eta \mu x < e^x$ και $\sigma \upsilon \nu x < e^x$.

ii. Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) < x$ για κάθε πραγματικό x , να μελετήσετε ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση f με $f(x) = g(\eta \mu x - e^x)$, $x \geq 0$.

58. Δίνεται f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(0)=0$, $f(x)>0$ για κάθε $x \neq 0$ και $f''(x) > 0$ για κάθε πραγματικό x .

i. Να δείξετε ότι το 0 είναι κρίσιμο σημείο της f .

ii. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα κοίλα.

iii. Να λύσετε την εξίσωση : $f'(\eta \mu x) \cdot f(x^2) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

59. Δίνεται f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν :

α) Σε σημείο x_0 παρουσιάζει τοπικό ακρότατο το 0 και,

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$: $f''(x) > 4(f'(x) - f(x))$

Να δείξετε ότι:

i. Η συνάρτηση g με $g(x) = e^{-2x} \cdot f(x)$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

ii. $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

60. Έστω f κυρτή στο $\mathbb{R}$. Αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων να δείξετε ότι για κάθε $x \neq 0$ ισχύει: $3f(x) > 4f\left(\frac{3}{4}x\right)$.

61. i) Έστω f κυρτή στο Δ και x_1, x_2 διαφορετικά μεταξύ τους, που ανήκουν στο διάστημα Δ . Να δείξετε ότι $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$
- ii) Για τους τυχαίους θετικούς α, β με $\alpha \neq \beta$ να δείξετε: $\alpha^\alpha \cdot \beta^\beta > \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^{\alpha + \beta}$.
62. Έστω f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με $f(0)=0$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) \ln(x+1)}{x^2}\right) = 4$
- i) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$.
- ii) Αν επιπλέον ξέρετε ότι για κάθε $x \neq 0$ ισχύει $x \cdot f''(x) > 0$ να δείξετε ότι το σημείο $O(0,0)$ είναι σημείο καμπής της f .
63. Έστω f με $f(x) = x^3 - \alpha x^2 + 3x + 2$, $x \in [1, +\infty)$.
- i) Να βρείτε τον α ώστε η γραφική παράσταση της f να έχει σημείο καμπής το $A(2, f(2))$.
- ii) Για την τιμή του α που βρήκατε στο i) να μελετήσετε την f ως προς τα ακρότατα και το πλήθος των ριζών της.
64. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η ευθεία $y = 2x + 1$ είναι ασύμπτωτη της C_f όπου $f(x) = \frac{\alpha x^2 + \beta x + 2}{3x - 1}$.
65. Έστω η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $e^{-x} \leq x \cdot f(x) \leq 1$ για κάθε $x > 0$. Να δείξετε ότι ο άξονας $x'x$ είναι ασύμπτωτη της C_f .
66. i) Να λύσετε την εξίσωση $\ln x = x - 1$, $x > 0$.
- ii) Να εξετάσετε ως προς τις κατακόρυφες ασύμπτωτες τη συνάρτηση f με $f(x) = \frac{1}{\ln x - x + 1}$.
67. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{\ln^2 x}{2}$, $x > 0$.
- i. Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης f' .
- ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > e$ ισχύει $\frac{\ln(x+1)}{x+1} < f(x+1) - f(x) < \frac{\ln x}{x}$.
68. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \frac{x^2}{2e}$.
- i. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, g έχουν κοινή εφαπτομένη σε κοινό τους σημείο.
- ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει ότι $x^{2e} \leq e^{x^2}$. Για ποια τιμή του x ισχύει η ισότητα στην προηγούμενη σχέση;
69. i. Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2 - x - 2 \ln x$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(1, 2)$.
- ii. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (1, 2)$, το οποίο είναι θέση σημείου καμπής για τη συνάρτηση $g(x) = \ln^2 x - x \ln x$.

- 70.** Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0,1]$. Αν η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο $[0,1]$ και ισχύει $f(0) = f(1) = 0$ τότε :
- Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο $(x_0, f(x_0))$ με $x_0 \in (0,1)$ στο οποίο η εφαπτομένη να είναι παράλληλη στον $x'x$.
 - Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία στο $[0,1]$.
 - Να δείξετε ότι: $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,1)$.
 - Αν $\gamma \in (0,1)$ να δείξετε ότι $f(x) < f'(\gamma)(x - \gamma) + f(\gamma)$ για κάθε $x \in (0,1)$.
- 71.** Θεωρούμε συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και κυρτή στο $(0, +\infty)$. Αν η ευθεία $y = 5x + 6$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ τότε:
- Να βρείτε το όριο $\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)]$.
 - Να δείξετε ότι $f(x) - f(x-1) < f'(x) < f(x+1) - f(x)$ για $x > 1$.
 - Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$.
- 72.** Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους $f(x) = \ln x, x > 0$ και $g(x) = 2x - x^2, x \in \mathbb{R}$.
- Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται σε ένα μόνο σημείο $A(x_0, y_0)$.
 - Να δείξετε ότι το πλησιέστερο σημείο της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $B(2,0)$ είναι το σημείο $A(x_0, y_0)$ του i. ερωτήματος.
 - Αν $h(x) = \frac{1}{f(x) - g(x)}$ να βρεθεί το πεδίο ορισμού της h και να εξεταστεί αν η γραφική της παράσταση έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.
 - Ένα σημείο $\Gamma(x(t), y(t))$ κινείται στη γραφική παράσταση της f έτσι ώστε σε κάθε χρονική στιγμή t , ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης $y(t)$ να ισούται με $2 - x(t)$. Να δείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης $x(t)$ του σημείου Γ , τη χρονική στιγμή t_0 που περνά από το σημείο $A(x_0, y_0)$ i. ερωτήματος είναι $\ln(x(t_0))$.

