mathematica.gr

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Δευτέρα 10 Ιουνίου 2019

Λύσεις

των

θεμάτων

Έκδοση 2η (11/06/2019, 09:30)

Οι απαντήσεις και οι λύσεις
είναι αποτέλεσμα συλλογικής δουλειάς
των Επιμελητών των φακέλων του Λυκείου
του Δικτυακού Τόπου **mathematica.gr**
με βάση υλικό που αναρτήθηκε στο mathematica
https://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=

Συνεργάστηκαν οι:

Βαρβεράκης Ανδρέας, Κακαβάς Βασίλης, Καλαθάκης Γιώργος,
Καρδαμίτσης Σπύρος, Κατσίπης Νίκος, Κούτρας Στάθης,
Κωστάκος Γρηγόρης, Μπεληγιάννης Αθανάσιος,
Παπαγρηγοράκης Μίλτος, Πρωτοπαπάς Λευτέρης,
Ρίζος Γιώργος, Στεργίου Μπάμπης, Στόγιας Σωτήρης,
Συγκελάκης Αλέξανδρος, Τηλέγραφος Κώστας,
Τσιφάκης Χρήστος, Χασάπης Σωτήρης

Το **Δελτίο** διατίθεται ελεύθερα
από το δικτυακό τόπο **mathematica.gr**

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΕΥΤΕΡΑ 10 ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$.

α) Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α;

(Μονάδες 2)

β) **i.** Πότε μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ έχει αντίστροφη;

(Μονάδα 1)

ii. Αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του **(i),** πώς ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της f;

(Μονάδες 3)

Μονάδες 6

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat που αφορά τα τοπικά ακρότατα μιας συνάρτησης.

Μονάδες 4

Α3. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ.
Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

Μονάδες 5

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.* ***Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.***

α) Για κάθε συνάρτηση f, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $A=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ με $f'(x)=0$ για κάθε $x\in A$, ισχύει ότι η f είναι σταθερή στο Α.

(Μονάδα 1 για τον χαρακτηρισμό Σωστό /Λάθος
Μονάδες 3 για την αιτιολόγηση)

β) Για κάθε συνάρτηση $f: A\to\mathbb{R}$, όταν υπάρχει το όριο της f καθώς το x τείνει στο $x_0 \in A$, τότε αυτό το όριο ισούται με την τιμή της f στο x_0.

(Μονάδα 1 για τον χαρακτηρισμό Σωστό /Λάθος
Μονάδες 3 για την αιτιολόγηση)

Μονάδες 8

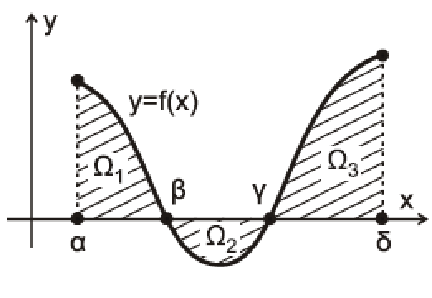
Α5. Έστω η συνάρτηση f του διπλανού σχήματος.
Αν για τα εμβαδά των χωρίων Ω_1, Ω_2 και Ω_3 ισχύει ότι

$$E(\Omega_1)=2\ ,\ E(\Omega_2)=1 \text{ και } E(\Omega_3)=3,$$

τότε το $\int_\alpha^\delta f(x)dx$ είναι ίσο με:

α) 6 **β)** -4 **γ)** 4 **δ)** 0 **ε)** 2

Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.



Μονάδες 2

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

A1. **α)** Ορισμός, (σχολικό βιβλίο, σελ. 15).

β) **i.** Όταν είναι 1 – 1 στο A, (σχολικό βιβλίο, σελ. 35).

ii. Αν η συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ είναι $1-1$, τότε ονομάζουμε αντίστροφη συνάρτηση της f και τη συμβολίζουμε με f^{-1}, τη συνάρτηση που έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών $f(A)$ της f και με την οποία κάθε στοιχείο $y\in f(A)$ αντιστοιχίζεται στο μοναδικό $x\in A$ για το οποίο ισχύει $f(x)=y$. Δηλαδή η αντίστροφη συνάρτηση της f ορίζεται ως εξής

$$f^{-1}:f(A)\to\mathbb{R},\ \text{με } f^{-1}(y)=x \ \text{ αν και μόνο αν } f(x)=y.$$

A2. Θεώρημα, (σχολικό βιβλίο, σελ. 142).

A3. Απόδειξη, (σχολικό βιβλίο, σελ. 135).

A4. **α)** **Λάθος**. Έστω η συνάρτηση $f:(-\infty,0)\cup(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\begin{cases}-1, x<0\\ \ \ 1, x>0\end{cases}$

Ισχύει $f'(x)=0$ για κάθε $x\in A$, αλλά η f δεν είναι σταθερή, αφού παίρνει δύο διαφορετικές τιμές.

Εναλλακτικά: Η πρόταση δεν ισχύει σε ένωση διαστημάτων. (Αναφορά του σχολίου του σχολικού βιβλίου στη σελίδα 134, χωρίς το αντιπαράδειγμα).

β) **Λάθος**. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\begin{cases}x, x\neq 0\\ 1, x=0\end{cases}$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x=0$, ενώ $f(0)=1$.

Εναλλακτικά: Η συγκεκριμένη συνθήκη ισχύει μόνο για συνεχείς συναρτήσεις.

A5. γ

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=e^{-x}+\lambda$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$, η οποία έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y=2$.

B1. Να αποδείξετε ότι $\lambda=2$.

Μονάδες 3

B2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)-x=0$ έχει μοναδική ρίζα, η οποία βρίσκεται στο διάστημα $(2,3)$.

Μονάδες 7

B3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1 (μονάδες 2) και στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφή της (μονάδες 4).

Μονάδες 6

B4. Έστω $f^{-1}(x)=-\ln(x-2)$, $x>2$. Να βρείτε την κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής της παράστασης (μονάδες 3) και στη συνέχεια να κάνετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση των συναρτήσεων f και f^{-1} στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων (μονάδες 6).

Μονάδες 9

ΛΥΣΗ:

B1. Εφόσον η ευθεία με εξίσωση $y=2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f, ισχύει ότι:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=2 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(e^{-x}+\lambda\right)=2 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e^x}+\lambda\right) \overset{\left(\frac{1}{+\infty}\right)}{=} 2 \Rightarrow 0+\lambda=2 \Rightarrow \lambda=2.$$

Οπότε $f(x)=e^{-x}+2,\ x\in\mathbb{R}$.

B2. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-x, x\in\mathbb{R}$.

Η g είναι συνεχής στο [2, 3] και ισχύουν

$$g(2)=f(2)-2=e^{-2}+2-2=e^{-2}>0 \text{ και}$$

$$g(3)=f(3)-3=e^{-3}+2-3=e^{-3}-1=\frac{1}{e^3}-1<0,$$

οπότε $g(2)\cdot g(3)<0$.

Άρα η συνάρτηση g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[2,3]$.

Επομένως υπάρχει

$$x_0\in(2,3) \text{ τέτοιο ώστε } g(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)-x_0=0.$$

Είναι μοναδικό αφού $g'(x)=f'(x)-1=-e^{-x}-1<0,\ x\in\mathbb{R}$. Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι συνάρτηση 1-1. Επομένως η ρίζα της x_0 είναι μοναδική.

B3. Η $f(x)=e^{-x}+2, x\in\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=-e^{-x}<0, x\in\mathbb{R}$. Συνεπώς, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Άρα είναι συνάρτηση $1-1$, οπότε έχει αντίστροφη.

Για να βρούμε την αντίστροφη της f υπολογίζουμε πρώτα το σύνολο τιμών της f, το οποίο θα είναι το πεδίο ορισμού της αντίστροφης. Έχουμε ότι:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(e^{-x}+2\right) \overset{(+\infty+2)}{=} +\infty \quad \text{και}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^{-x}+2\right)=0+2=2.$$

Συνεπώς, εφόσον η f είναι συνεχής στο $D_f=\mathbb{R}$ και γνησίως φθίνουσα, ισχύει:

$$f(D_f)=\left(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right)=(2,+\infty), \text{ οπότε } D_{f^{-1}}=(2,+\infty).$$

Για να βρούμε την αντίστροφη λύνουμε την εξίσωση $y=f(x)$ ως προς $x\in\mathbb{R}$ με $y\in(2,+\infty)$ και έχουμε:

$$y=e^{-x}+2 \Leftrightarrow y-2=e^{-x} \Leftrightarrow x=-\ln(y-2), y>2.$$

Συνεπώς

$$f^{-1}(x)=-\ln(x-2), x>2.$$

B4. Ισχύει ότι

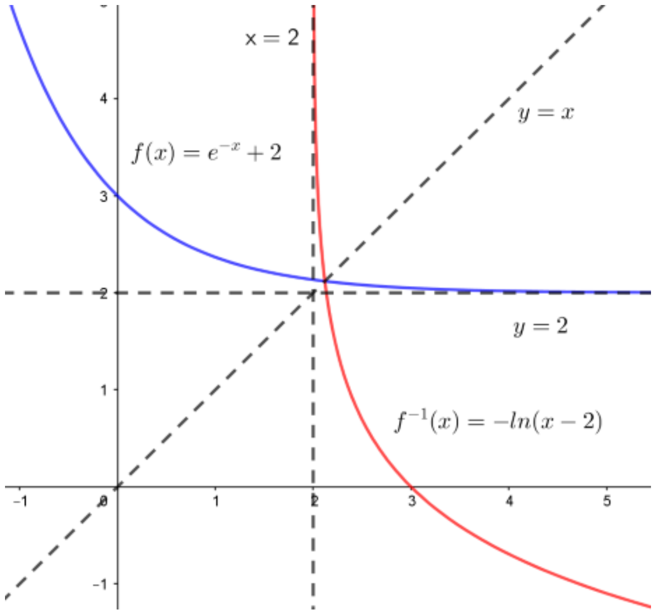
$$\lim_{x\to2^+} f^{-1}(x)=\lim_{x\to2^+}\left(-\ln(x-2)\right) \overset{(-(-\infty))}{=} +\infty,$$

αφού θέτοντας $u=x-2$ έχουμε $\lim_{x\to2^+} u=\lim_{x\to2^+}(x-2)=0$ οπότε και

$$\lim_{x\to 2^+}\left(-\ln(x-2)\right)=\lim_{u\to 0^+}\left(-\ln u\right)\overset{(-(-\infty))}{=}+\infty .$$

Άρα η ευθεία με εξίσωση $x=2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f^{-1} και δεν υπάρχει άλλη κατακόρυφη ασύμπτωτη, καθώς η f^{-1} είναι συνεχής για $x>2$.

Σχεδιάζουμε μια πρόχειρη γραφική παράσταση των συναρτήσεων f και f^{-1} στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων ως εξής: Για την γραφική παράσταση της f^{-1}, μετατοπίζουμε παράλληλα τη γραφική παράσταση της $y = \ln x$ στον άξονα x'x κατά 2 μονάδες και κατασκευάζουμε την συμμετρική της ως προς τον x'x. Η γραφική παράσταση της f προκύπτει ως συμμετρική της γραφικής παράστασης της f^{-1} ως προς την ευθεία y = x.



ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2+\alpha &, x\ge 1\\ e^{x-1}+\beta x &, x<1\end{cases}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ και $\beta=1$.

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 4

Γ3. **i.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα x_0, η οποία είναι αρνητική.

(Μονάδες 4)

ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^2(x)-x_0\cdot f(x)=0$ είναι αδύνατη στο $(x_0,+\infty)$.

(Μονάδες 4)

Μονάδες 8

Γ4. Ένα σημείο M(x, y) κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=f(x)$, $x\ge 1$.

Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το σημείο Μ διέρχεται από το σημείο $A(3,10)$, ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου Μ είναι 2 μονάδες ανά δευτερόλεπτο. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου $\overset{\Delta}{MOK}$ τη χρονική στιγμή t_0, όπου $K(x,0)$ και $O(0,0)$.

Μονάδες 8

ΛΥΣΗ:

Γ1. Η f ως παραγωγίσιμη είναι συνεχής, συνεπώς

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^-} f(x) = f(1).$$

Για $x>1$ έχουμε

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+}(x^2+\alpha) = 1+\alpha .$$

Για $x<1$ έχουμε

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-}(e^{x-1}+\beta x) = 1+\beta$$

και

$$f(1) = 1+\alpha .$$

Επομένως

$$1+\alpha = 1+\beta \Leftrightarrow \alpha=\beta .$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο 1. Συνεπώς

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} .$$

Για $x>1$ έχουμε

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^+}\frac{x^2+\alpha-1-\alpha}{x-1} = \lim_{x\to1^+}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to1^+}(x+1) = 2 .$$

Για $x<1$ έχουμε

$$\lim_{x\to1^-}\frac{e^{x-1}+\alpha x-1-\alpha}{x-1} \overset{0/0}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to1^-}\frac{(e^{x-1}+\alpha x-1-\alpha)'}{(x-1)'} = \lim_{x\to1^-}\frac{e^{x-1}+\alpha}{1} = 1+\alpha .$$

Άρα

$$1+\alpha = 2 \Leftrightarrow \alpha=1 \text{ και } \beta=1 .$$

Γ2. Για κάθε $x>1$ η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=2x$. Άρα $f'(x)>0$ για κάθε $x>1$.

Για κάθε $x<1$ η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=e^{x-1}+1$. Άρα $f'(x)>0$ για κάθε $x<1$.

Συνεπώς ισχύει ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(x^2+1) = \lim_{x\to+\infty}(x^2) = +\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(e^{x-1}+x) = -\infty \text{, αφού } \lim_{x\to-\infty} e^{x-1} = 0 .$$

Η f ως συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ έχει σύνολο τιμών το

$$f(\mathbb{R})=\left(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}.$$

Γ3. **i.** Ισχύει ότι η f είναι συνεχής στο $[-1,0]$ με $f(0)=\dfrac{1}{e}>0$, $f(-1)=\dfrac{1}{e^2}-1=\dfrac{1-e^2}{e^2}<0$.

Σύμφωνα με το Θ. Bolzano η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ρίζα στο $(-1,0)\subseteq\mathbb{R}$ και η ρίζα αυτή είναι μοναδική στο $\mathbb{R}$ (επειδή η f είναι $1-1$ ως γνησίως αύξουσα). Άρα η εξίσωση έχει ακριβώς μία αρνητική ρίζα .

ii. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, ισχύει ότι:

$$x>x_0 \Rightarrow f(x)>f(x_0) \Rightarrow f(x)>0.$$

Άρα $f^2(x)>0$ για $x>x_0$ και επειδή $x_0<0$ είναι $-x_0 f(x)>0$. Επομένως για κάθε $x\in(x_0,+\infty)$ είναι

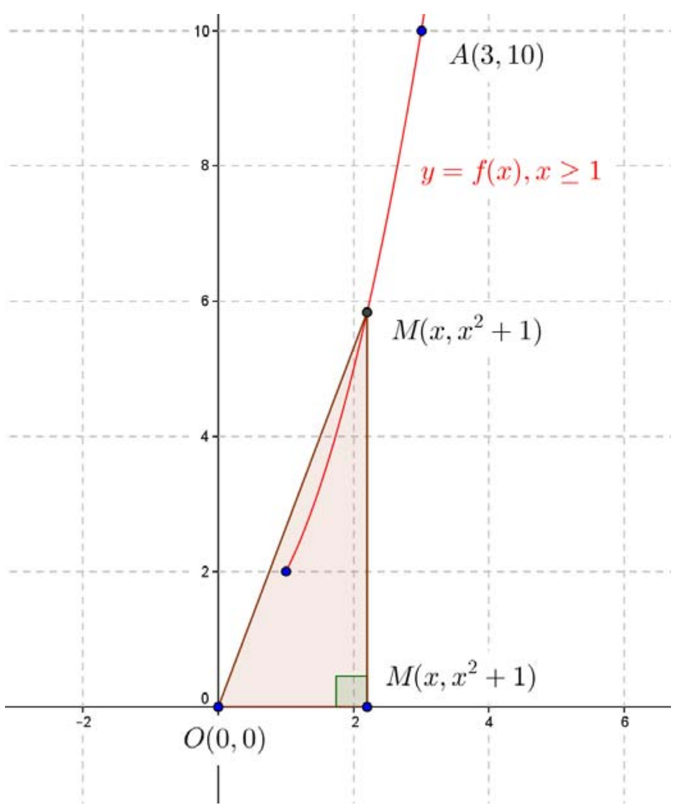
$$f^2(x)-x_0 f(x)>0.$$

Έτσι η εξίσωση $f^2(x)-x_0 f(x)=0$ είναι αδύνατη στο $(x_0,+\infty)$.

Γ4. Τη χρονική στιγμή t_0 ισχύει: $x(t_0)=3$, $y(t_0)=10$ και $x'(t_0)=2$ μονάδες /sec.

Για το εμβαδόν E του τριγώνου MOK ισχύει ότι

$$E=\frac{1}{2}|x|\cdot|x^2+1| \overset{x\ge 1}{\Leftrightarrow} E=\frac{1}{2}x(x^2+1) \Leftrightarrow E=\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}x.$$



Κάθε χρονική στιγμή t θα έχουμε ότι

$$E(t)=\frac{1}{2}x^3(t)+\frac{1}{2}x(t) \text{ και } E'(t)=\frac{3}{2}x^2(t)x'(t)+\frac{1}{2}x'(t).$$

Τη χρονική στιγμή t_0 θα είναι:

$$E'(t_0)=\frac{3}{2}x^2(t_0)x'(t_0)+\frac{1}{2}x'(t_0).$$

Άρα $E'(t_0)=\frac{3}{2}\cdot 3^2\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 2=28$ τετραγωνικές μονάδες ανά δευτερόλεπτο.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=(x-1)\cdot\ln(x^2-2x+2)+\alpha x+\beta$ όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ και η ευθεία $(\varepsilon): y=-x+2$, η οποία εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $A(1,1)$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=-1$ και $\beta=2$.

Μονάδες 4

Δ2. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, την ευθεία (ε) και τις ευθείες $x=1$ και $x=2$.

Μονάδες 5

Δ3. **i.** Να αποδείξετε ότι $f'(x)\geq -1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 3)

ii. Να αποδείξετε ότι $f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)+\lambda\geq(\lambda-1)\cdot\ln(\lambda^2-2\lambda+2)+\frac{3}{2}$, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

Μονάδες 8

Δ4. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=-x^3-x+2$, $x\in\mathbb{R}$ έχουν μοναδική κοινή εφαπτομένη και να βρείτε την εξίσωσή της.

Μονάδες 8

ΛΥΣΗ:

Δ1. Πρέπει και αρκεί να ισχύουν οι σχέσεις $\begin{cases} f(1)=1 \\ f'(1)=\lambda_\varepsilon=-1 \end{cases}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$f'(x)=\ln(x^2-2x+2)+\frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}+\alpha.$$

Συνεπώς

$$f'(1)=-1\Leftrightarrow\alpha=-1 \text{ και } f(1)=1\Leftrightarrow\alpha+\beta=1\Leftrightarrow\beta=2.$$

Έτσι είναι

$$f(x)=(x-1)\ln(x^2-2x+2)-x+2$$

και

$$f'(x)=\ln(x^2-2x+2)+\frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}-1, x\in\mathbb{R}.$$

Δ2. Το ζητούμενο εμβαδό είναι ίσο με

$$E=\int_1^2\left|f(x)-\left(-x+2\right)\right|dx=\int_1^2\left|f(x)+x-2\right|dx.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x)=f(x)-(-x+2)=(x-1)\ln(x^2-2x+2), x\in\mathbb{R}.$$

Είναι

$$h(x)=0\Leftrightarrow x-1=0 \quad \text{ή} \quad \ln(x^2-2x+2)=0\Leftrightarrow x=1.$$

$$h(x)>0\Leftrightarrow x>1,$$

(διότι $\ln(x^2-2x+2)\geq 0\Leftrightarrow x^2-2x+2\geq 1\Leftrightarrow (x-1)^2\geq 0$ που ισχύει).

Συνεπώς η συνάρτηση h είναι μη αρνητική στο [1,2].

Άρα το ζητούμενο εμβαδό είναι ίσο με

$$\begin{aligned}\int_1^2 h(x)dx&=\int_1^2(x-1)\ln(x^2-2x+2)dx=\\&=\int_1^2\left(\frac{x^2-2x+2}{2}\right)'\ln(x^2-2x+2)dx=\\&=\left[\left(\frac{x^2-2x+2}{2}\right)\ln(x^2-2x+2)\right]_1^2-\int_1^2\frac{\cancel{x^2-2x+2}}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}(x-1)}{\cancel{x^2-2x+2}}dx=\\&=\ln2-\left[\frac{(x-1)^2}{2}\right]_1^2=\ln2-\frac{1}{2}=\frac{2\ln2-1}{2}\ \text{τ.μ.}\end{aligned}$$

Δ3. **i.** Η f' είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο

$$\begin{aligned}f''(x)&=\frac{2(x-1)}{x^2-2x+2}+\frac{4(x-1)(x^2-2x+2)-4(x-1)^3}{(x^2-2x+2)^2}=\\&=\frac{6(x-1)(x^2-2x+2)-4(x-1)^3}{(x^2-2x+2)^2}=\frac{2(x-1)(x^2-2x+4)}{(x^2-2x+2)^2}, x\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Είναι $f''(x)\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$, αφού το τριώνυμο x^2-2x+4 έχει αρνητική διακρίνουσα, άρα είναι πάντοτε θετικό.

Συνεπώς η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty,1\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[1,+\infty\right)$, οπότε παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=1$ το $f'\left(1\right)=-1$.

Άρα $f'(x)\geq -1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

ii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $s(x)=f(x)+x, x\in\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$s'(x)=f'(x)+1\geq 0,$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$ (λόγω του ερωτήματος Δ3i).

Άρα η συνάρτηση s είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Η προς απόδειξη ανισότητα γράφεται:

$$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\geq(\lambda-1)\ln(\lambda^2-2\lambda+2)-\lambda+2-\frac{1}{2}\Leftrightarrow f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)+\lambda+\frac{1}{2}\geq f(\lambda)+\lambda$$

$$\Leftrightarrow s\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\geq s(\lambda)\Leftrightarrow \lambda+\frac{1}{2}\geq\lambda\Leftrightarrow\frac{1}{2}\geq 0,$$

που ισχύει για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

Σχόλιο: Η ισότητα, όπως φαίνεται και από την παραπάνω λύση δεν ισχύει για καμία τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$.

Δ4. Έστω ότι υπάρχει κοινή εφαπτομένη η οποία εφάπτεται των C_f και C_g στα σημεία $A(x_1,f(x_1))$ και $B(x_2,g(x_2))$ αντίστοιχα. Τότε στο σημείο A η C_f έχει εφαπτομένη με εξίσωση

$$y-f(x_1)=f'(x_1)(x-x_1)\Leftrightarrow y=f'(x_1)x+f(x_1)-x_1f'(x_1),$$

ενώ η C_g, αφού η g είναι παραγωγίσιμη, στο σημείο B έχει εφαπτομένη με εξίσωση :

$$y-g(x_2)=g'(x_2)(x-x_2)\Leftrightarrow y=g'(x_2)x+g(x_2)-x_2g'(x_2).$$

Οι παραπάνω εξισώσεις εφαπτομένων ταυτίζονται αν και μόνο αν:

$$\begin{cases} f'(x_1)=g'(x_2) & (1)\\ f(x_1)-x_1f'(x_1)=g(x_2)-x_2g'(x_2) & (2)\end{cases}$$

Όμως λόγω του Δ3i έχουμε $f'(x_1)\geq -1$ με ισότητα για $x_1=1$.

Επίσης $g'(x)=-3x^2-1$ και φανερά ισχύει $g'(x)\leq -1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, με ισότητα για $x=0$.

Άρα για να ισχύει η (1) πρέπει $f'(x_1)=g'(x_2)=-1$ δηλαδή $x_1=1$ και $x_2=0$ λύσεις που επαληθεύουν και τη σχέση (2). Άρα οι C_f, C_g έχουν μία μόνο κοινή εφαπτομένη η οποία εφάπτεται της C_f στο $A(1,f(1))$ και της C_g στο σημείο $B(0,g(0))$.

Η εξίσωση της κοινής εφαπτομένης είναι

$$y-g(0)=g'(0)(x-0)\Leftrightarrow y-2=-(x-0)\Leftrightarrow y=-x+2.$$

ΑΛΛΕΣ ΛΥΣΕΙΣ:

B3.

$$\begin{aligned} y=f(x) &\Leftrightarrow y=e^{-x}+2\\ &\Leftrightarrow e^{-x}=y-2\\ &\Leftrightarrow -x=\ln(y-2),\ y>2\\ &\Leftrightarrow x=-\ln(y-2).\end{aligned}$$

Επομένως για κάθε $y\in(2,+\infty)$ υπάρχει μοναδικό $x\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $y=f(x)$.

Άρα η συνάρτηση f είναι 1 – 1 δηλαδή αντιστρέψιμη, με $f^{-1}(x)=-\ln(x-2)$ και σύνολο τιμών της f και ταυτόχρονα πεδίο ορισμού της f^{-1} το διάστημα $(2,+\infty)$.

Γ3. **i.** Η συνάρτηση f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, οπότε έχει μία τουλάχιστον ρίζα. Αυτή είναι μοναδική, αφού η συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη. Αλλά για μη αρνητικά x είναι προφανώς f(x) > 0, οπότε η ρίζα είναι αρνητική.

Γ3. **ii.** Για $x \neq x_0$ είναι $f(x) \neq 0$ άρα η εξίσωση γίνεται $f(x) = x_0$.

Όμως για $x > x_0$ επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα παίρνουμε $f(x) > f(x_0)$ δηλαδή $f(x) > 0$.

Όμως είναι $x_0 < 0$, όπως έχει ήδη αποδειχθεί, συνεπώς η εξίσωση $f(x) = x_0$ είναι αδύνατη (πρώτο μέλος θετικό, 2ο μέλος αρνητικό).

Γ3. **ii.** Για $x > x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0) \Rightarrow f(x) - x_0 > -x_0 > 0$

Ακόμα είναι $f(x) > 0$ και επομένως $f(x)(f(x) - x_0) > 0$.

Άρα η εξίσωση $f^2(x) - x_0 \cdot f(x) = 0$ είναι αδύνατη στο $(x_0, +\infty)$.

Δ2. Για $\alpha = -1, \beta = 2$ έχουμε $f(x) = (x-1)\cdot \ln\left(x^2 - 2x + 2\right) - x + 2$ οπότε το ζητούμενο εμβαδόν (έστω E) είναι

$$E = \int_1^2 \left| f(x) - (-x+2) \right| dx =$$

$$= \int_1^2 \left| (x-1)\cdot \ln\left(x^2 - 2x + 2\right) \right| dx \overset{x^2-2x+2=(x-1)^2+1\geq 1 \Rightarrow \ln\left(x^2-2x+2\right)\geq 0,\, x-1\geq 0,\, \forall x\geq 1}{=}$$

$$= \int_1^2 (x-1)\cdot \ln\left(x^2 - 2x + 2\right) dx \overset{\substack{u=x^2-2x+2 \Rightarrow du=2(x-1)dx \Rightarrow (x-1)dx=\frac{1}{2}du \\ x=1\Rightarrow u=1,\, x=2\Rightarrow u=2}}{=}$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{2}\cdot \ln u du = \frac{1}{2}\int_1^2 (u)' \cdot \ln u du =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[u \ln u\right]_1^2 - \int_1^2 \cancel{u} \cdot \frac{1}{\cancel{u}} du \right) = \frac{1}{2}(2\ln 2 - 1) = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

Δ2. $$\int_1^2 |f(x) - (-x+2)|\, dx = \int_1^2 \left[(x-1)\ln(x^2-2x+2)\right] dx =$$

$$= \int_1^2 \left[(x-1)\ln(x^2-2x+2)\right] dx = \int_1^2 \left[\left(\frac{x^2}{2} - x\right)' \cdot \ln(x^2-2x+2)\right] dx =$$

$$= \left[\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\ln(x^2-2x+2)\right]_1^2 - \int_1^2 \left[\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\frac{2x-2}{x^2-2x+2}\right] dx =$$

$$= 0 - 0 - \int_1^2 \frac{x^2-2x}{2}\,\frac{2(x-1)}{x^2-2x+2} dx = -\int_1^2 \frac{x^3-3x^2+2x}{x^2-2x+2} dx =$$

$$= -\int_1^2 \left(x - 1 + \frac{-2x+2}{x^2-2x+2}\right) dx = -\left[\frac{x^2}{2} - x - \ln(x^2-2x+2)\right]_1^2 =$$

$$= -\left[2 - 2 - \ln 2 - \frac{1}{2} + 1 + 0\right] = \ln 2 + \frac{1}{2} - 1 = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

Δ3. **i.** Για $\alpha=-1$ και $\beta=2$ έχουμε: $f'(x)=\ln\left(x^2-2x+2\right)+\dfrac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}-1, x\in\mathbb{R}$ και με

$$x^2-2x+2=(x-1)^2+1\geq 1, \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow\begin{cases}\ln\left(x^2-2x+2\right)\geq 0\\ \dfrac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}\geq 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \ln\left(x^2-2x+2\right)+\frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}\geq 0$$

$$\Rightarrow f'(x)\geq -1, \forall x\in\mathbb{R}.$$

ii. Είναι

$$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)+\lambda\geq(\lambda-1)\cdot\ln\left(\lambda^2-2\lambda+2\right)+\frac{3}{2}\Leftrightarrow$$

$$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)+\lambda\geq f(\lambda)+\lambda-2+\frac{3}{2}\Leftrightarrow$$

$$\boxed{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)\geq-\frac{1}{2}\quad(1)}$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι ισχύει η (1) .

Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\left[\lambda,\lambda+\dfrac{1}{2}\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\lambda,\lambda+\dfrac{1}{2}\right)$, οπότε από το Θεώρημα της μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού για την f στο διάστημα $\left[\lambda,\lambda+\dfrac{1}{2}\right]$ προκύπτει ότι υπάρχει $\xi\in\left(\lambda,\lambda+\dfrac{1}{2}\right)$ ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)}{\lambda+\frac{1}{2}-\lambda}=\frac{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)}{\frac{1}{2}}\Rightarrow f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)=\frac{f'(\xi)}{2}$$

και με $f'(\xi)\geq-1$ (από το Δ3 . i)) προκύπτει ότι ισχύει η (1) άρα και η αρχική .

Δ3. **i.** Έχουμε

$$f'(x)=\ln(x^2-2x+2)+\frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}-1=\ln\left[(x-1)^2+1\right]+\frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2+1}-1, x\in\mathbb{R}.$$

Είναι

$$(x-1)^2\geq 0\Leftrightarrow(x-1)^2+1\geq 1\Leftrightarrow\ln\left[(x-1)^2+1\right]\geq\ln 1\Leftrightarrow\ln\left[(x-1)^2+1\right]\geq 0.$$

Ακόμα είναι

$$\frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2+1}\geq 0 \text{ αφού } 2(x-1)^2\geq 0 \text{ και } (x-1)^2+1>0.$$

Τότε είναι

$$\ln\left[\left(x-1\right)^2+1\right]+\frac{2\left(x-1\right)^2}{\left(x-1\right)^2+1}\geq 0$$

Η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$ αφού το $\left(x-1\right)^2+1$ γίνεται ίσο με 1 μόνο για $x=1$, οπότε και

$$\ln\left[\left(x-1\right)^2+1\right]=0$$

και $2\left(x-1\right)^2=0$, μόνο για $x=1$, οπότε και

$$\frac{2\left(x-1\right)^2}{\left(x-1\right)^2+1}=0.$$

$$f'(x)=\ln\left[\left(x-1\right)^2+1\right]+\frac{2\left(x-1\right)^2}{\left(x-1\right)^2+1}-1\Leftrightarrow f'(x)+1=\ln\left[\left(x-1\right)^2+1\right]+\frac{2\left(x-1\right)^2}{\left(x-1\right)^2+1}\geq 0,$$

οπότε είναι $f'\left(x\right)+1\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα $f'\left(x\right)\geq -1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$.

Δ3. **ii.** Από το Δ3 i. γνωρίζουμε ότι $f'(x)\geq -1$. Ολοκληρώνουμε στο διάστημα $\left[\lambda,\lambda+\frac{1}{2}\right]$ για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ και έχουμε:

$$\begin{aligned}\int_{\lambda}^{\lambda+\frac{1}{2}}f'(x)dx\geq\int_{\lambda}^{\lambda+\frac{1}{2}}-1dx\quad &\Rightarrow f(\lambda+\frac{1}{2})-f(\lambda)\geq -\frac{1}{2}\\ &\Rightarrow f(\lambda+\frac{1}{2})\geq f(\lambda)-\frac{1}{2}\\ &\Rightarrow f(\lambda+\frac{1}{2})+\lambda\geq(\lambda-1)\ln(\lambda^2-2\lambda+2)-\lambda+2-\frac{1}{2}+\lambda\\ &\Rightarrow f(\lambda+\frac{1}{2})+\lambda\geq(\lambda-1)\ln(\lambda^2-2\lambda+2)+\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Δ3. **ii.** Η σχέση που μας δίνεται, γράφεται

$$\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\ln\left(\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)^2+1\right)\geq(\lambda-1)\ln\left((\lambda-1)^2+1\right)\quad(1)$$

Αν θεωρήσω την $h(\lambda)=\lambda\ln(\lambda^2+1)$, η (1) γράφεται

$$h\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\geq h(\lambda-1)\ \ (2)$$

Η h είναι περιττή. Επίσης για $\lambda\geq 0$ είναι γνησίως αύξουσα ως γινόμενο δύο μη αρνητικών γνησίως αυξουσών. Αφού είναι και περιττή είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Είναι $\lambda-\frac{1}{2}>\lambda-1$, οπότε η (2) ισχύει και μάλιστα με γνήσια ανισότητα.

Δ4. Η ισότητα $f'(x_1)=g'(x_2)$ γράφεται

$$\ln\left(x_1^2-2x_1+2\right)+\frac{2(x_1-1)^2}{x_1^2-2x_1+2}+3x_2^2=0$$

και επειδή στο πρώτο μέλος έχουμε άθροισμα μη αρνητικών όρων, θα είναι $x_1=1, x_2=0$ κ.λπ.