

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο: ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΘΕΜΑ Α

Άσκηση 1

Να δείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Λύση

Για $x \neq x_0$ έχουμε $f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)$, οπότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0,$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 . Επομένως, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0 .

Άσκηση 2

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν

- f συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι σταθερή στο Δ .

Λύση

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$.

Πράγματι

- Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \quad (1)$$

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ , ισχύει $f'(\xi) = 0$, οπότε, λόγω της (1), είναι

$$f(x_1) = f(x_2).$$

- Αν $x_1 > x_2$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$.

Σε όλες τις περιπτώσεις λοιπόν είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

Άσκηση 3

- i. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .
- ii. Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;

Λύση

- i. Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$.

Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ.

Επομένως υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο,

$$\text{ώστε } f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \text{ οπότε έχουμε}$$

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1).$$

Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$,

οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.

- ii. Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αν

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0.$$

Άσκηση 4

- i. Έστω δυο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ . Αν
- οι f, g είναι συνεχείς στο Δ
 - $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ τότε να δείξετε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει

$$f(x) = g(x) + c$$

- ii. Ποια η γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος μέσης τιμής;

Λύση

- i. Η συνάρτηση $f - g$ είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει

$$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

Επομένως σύμφωνα με γνωστό θεώρημα, η συνάρτηση $f - g$ είναι σταθερή στο Δ . Άρα υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x) - g(x) = c$, οπότε $f(x) = g(x) + c$.

- ii. Γεωμετρικά το Θ.Μ.Τ. για μια συνάρτηση f στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, σημαίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(\alpha, f(\beta))$ και $B(\beta, f(\beta))$.

Άσκηση 5

- i. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ .

Αν η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να δείξετε ότι $f'(x_0) = 0$.

- ii. Πότε μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Λύση

- i. Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο.

Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει ένα $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \Delta$ και $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ **(1)**

Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , ισχύει

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Επομένως,

- αν $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, τότε λόγω της **(1)**, θα είναι $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$,

$$\text{οπότε θα έχουμε } \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \textbf{(2)}$$

- αν $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, τότε λόγω της **(1)**, θα είναι $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$,

$$\text{οπότε θα έχουμε } \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad \textbf{(3)}$$

Έτσι από τις **(2)** και **(3)** έχουμε $f'(x_0) = 0$.

Η απόδειξη για το τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη.

- ii. Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

και είναι πραγματικός αριθμός.

Άσκηση 6

- i. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ με $f'(x) = -\eta\mu x$
- ii. Ποια η γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Rolle;

Λύση

- i. Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbf{R}$ και $h \neq 0$ ισχύει:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sigma\upsilon\nu(x+h) - \sigma\upsilon\nu(x)}{h} = \frac{\sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu h - \eta\mu x \cdot \eta\mu h - \sigma\upsilon\nu x}{h} =$$
$$\sigma\upsilon\nu x \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu h - 1}{h} - \eta\mu x \cdot \frac{\eta\mu h}{h},$$

οπότε

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\sigma\upsilon\nu x \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu h - 1}{h} \right) - \lim_{h \rightarrow 0} \left(\eta\mu x \cdot \frac{\eta\mu h}{h} \right) =$$

$$\sigma\upsilon\nu x \cdot 0 - \eta\mu x \cdot 1 = -\eta\mu x.$$

$$\text{Δηλαδή } (\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x.$$

- ii. Γεωμετρικά το θεώρημα Rolle για τη συνάρτηση f στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ σημαίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x .

Άσκηση 7

- i. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^\nu, \nu \in \mathbf{N} - \{0,1\}$.

Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ και ότι ισχύει

$$f'(x) = \nu x^{\nu-1}.$$

- ii. Πότε μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στα εσωτερικά σημεία του Δ , λέγεται κυρτή στο Δ ;

Λύση

- i. Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbf{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^\nu - x_0^\nu}{x - x_0} =$$

$$\frac{(x - x_0)(x^{\nu-1} + x^{\nu-2}x_0 + \dots + x_0^{\nu-1})}{x - x_0} = x^{\nu-1} + x^{\nu-2}x_0 + \dots + x_0^{\nu-1},$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x^{\nu-1} + x^{\nu-2}x_0 + \dots + x_0^{\nu-1}) = x_0^{\nu-1} + x_0^{\nu-1} + \dots + x_0^{\nu-1} = \nu x_0^{\nu-1},$$

$$\text{δηλαδή } (x^\nu)' = \nu x^{\nu-1}.$$

- ii. Η συνάρτηση f λέγεται κυρτή στο Δ , αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ .

Άσκηση 8

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbf{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}^*$

και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Λύση

Αν $x > 0$, τότε $(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$, ενώ αν $x < 0$, τότε $\ln|x| = \ln(-x)$, οπότε αν

θέσουμε $y = \ln(-x)$ και $u = -x$, έχουμε $y = \ln u$. Επομένως,

$$y' = (\ln u)' = \frac{1}{u} u' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$$

και άρα $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$.

Άσκηση 9

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε να δείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f .

Λύση

Επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0 ,

η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$. Έτσι έχουμε

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in (\alpha, x_0] \quad (1)$$

Επειδή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_0, \beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0 ,

η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, \beta)$. Έτσι έχουμε

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in [x_0, \beta) \quad (2)$$

Επομένως λόγω των **(1)** και **(2)**, ισχύει

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in (\alpha, \beta),$$

που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α, β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

Άσκηση 10

- i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^\alpha$ με $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει: $f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$.
- ii. Δίνεται συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A . Να δώσετε τον ορισμό του τοπικού μεγίστου για την f .

Λύση

- i. Πράγματι, αν $y = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ και θέσουμε $u = \alpha \ln x$, τότε $y = e^u$. Επομένως,

$$y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}.$$

- ii. Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού μεγίστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο.

Άσκηση 11

Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = a^x, a > 0$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ και ισχύει:

$$f'(x) = a^x \cdot \ln a .$$

Λύση

Πράγματι, αν $y = a^x = e^{x \ln a}$ και θέσουμε $u = x \ln a$, τότε $y = e^u$. Επομένως,

$$y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a .$$

Άσκηση 12

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως είναι συνεχής. Αν η $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε να δείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β) .

Λύση

Έχουμε ότι

$$f'(x) > 0, \text{ για κάθε } x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta).$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta)$. Επομένως, για $x_1 < x_0 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f . Θα δείξουμε τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β) . Πράγματι, έστω $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ με $x_1 < x_2$.

- αν $x_1, x_2 \in (\alpha, x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.
- αν $x_1, x_2 \in [x_0, \beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, \beta)$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.
- Τέλος αν $x_1 < x_0 < x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$.

Επομένως σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β) .

Άσκηση 13

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ είναι παραγωγίσιμη $\mathbf{R}$ και ισχύει $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x$.

Λύση

Για κάθε $x \in \mathbf{R}$ και $h \neq 0$ ισχύει

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\eta\mu(x+h) - \eta\mu x}{h} = \frac{\eta\mu x \sigma\upsilon\nu h + \sigma\upsilon\nu x \eta\mu h - \eta\mu x}{h} = \\ &= \eta\mu x \cdot \frac{(\sigma\upsilon\nu h - 1)}{h} + \sigma\upsilon\nu x \cdot \frac{\eta\mu h}{h}.\end{aligned}$$

Επειδή

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\eta\mu h}{h} = 1 \text{ και } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu h - 1}{h} = 0,$$

έχουμε

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \eta\mu x \cdot 0 + \sigma\upsilon\nu x \cdot 1 = \sigma\upsilon\nu x.$$

Δηλαδή $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$

Άσκηση 14

Να αποδείξετε ότι η αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε και η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Λύση

Για $x \neq x_0$, ισχύει:

$$\begin{aligned} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}. \end{aligned}$$

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} &= \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} &= f'(x_0) + g'(x_0), \end{aligned}$$

δηλαδή

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Άσκηση 15

- i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
- ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x, x \in \mathbf{R}_1 = \{x \in \mathbf{R} / \sigma\upsilon\nu x \neq 0\}$, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}_1$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$.

Λύση

- i. Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $(0, +\infty)$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} =$$
$$\frac{x - x_0}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}},$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}},$$

$$\text{δηλαδή } (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

- ii. Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbf{R}_1$ έχουμε:

$$(\varepsilon\varphi x)' = \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \right)' = \frac{(\eta\mu x)' \cdot \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x (\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x \cdot \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} =$$
$$\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}.$$

ΘΕΜΑ Β

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-2} + x - 3$.

1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
2. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$ και το σύνολο τιμών της f .

Λύση

- i. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbf{R}$. Παραγωγίζουμε τη συνάρτηση και έχουμε:

$$f'(x) = e^{x-2} + 1 > 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R},$$

οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbf{R}$.

- ii. Μία προφανής ρίζα της συνάρτησης είναι το $x = 2$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα αυτή η ρίζα είναι μοναδική. Για το σύνολο τιμών υπολογίζουμε τα παρακάτω όρια:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{x-2} + x - 3) = -\infty,$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-2} = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 3) = -\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{x-2} + x - 3) = +\infty,$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-2} = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 3) = +\infty.$$

Και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbf{R}$, το σύνολο τιμών της f είναι όλο το $\mathbf{R}$.

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4x^3 + 2(\lambda - 1)x - \lambda$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα $(0,1)$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F(x) = x^4 + (\lambda - 1)x^2 - \lambda x,$$

η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ ως πολυωνυμική. Επιπλέον ισχύει $F(0) = F(1) = 0$,

επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την f , αφού η f :

- είναι συνεχής στο $[0,1]$
- είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$

και $F(0) = F(1)$,

άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $F'(\xi) = 0$. Όμως $f(\xi) = F'(\xi) = 0$, οπότε αποδείχτηκε το ζητούμενο.

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x^2)$.

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και την παράγωγο της f .
- ii. Να βρείτε τα σημεία της C_f στα οποία η εφαπτομένη διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- iii. Να τη μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- iv. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

Λύση

- i. Πρέπει $x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$, άρα το πεδίο ορισμού είναι το $\mathbf{R}^*$. Είναι

$$f(x) = \ln(x^2) = \ln(|x|^2) = 2 \ln|x|$$

οπότε

$$f'(x) = (2 \ln|x|)' = 2 \frac{1}{x}.$$

- ii. Έστω $A(x_0, 2 \ln|x_0|)$ το σημείο επαφής της εφαπτομένης της C_f . Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$y - 2 \ln|x_0| = \frac{2}{x_0}(x - x_0) \quad (1)$$

και για να διέρχεται από την αρχή των αξόνων πρέπει οι συντεταγμένες του $O(0,0)$ να επαληθεύουν την (1), οπότε η (1) γίνεται:

$$-2 \ln|x_0| = \frac{2}{x_0}(-x_0) \Leftrightarrow \ln|x_0| = 1 = \ln e \Leftrightarrow x_0 = \pm e, \text{ και } f(x_0) = 2 \ln e = 2$$

άρα τα σημεία της C_f είναι τα $A(e, 2)$ και $B(-e, 2)$

- iii. Η συνάρτηση f ορίζεται στο $\mathbf{R}^* = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ και είναι συνεχής.

Επειδή $f'(x) = 2 \frac{1}{x}$, έχουμε ότι:

$f'(x) < 0$ για $x \in (-\infty, 0)$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$ και

$f'(x) > 0$ για $x \in (0, +\infty)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Επίσης έχουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty.$$

Από τα προηγούμενα έπεται ότι για $x \in (-\infty, 0)$, το σύνολο τιμών είναι το $(-\infty, +\infty)$ και για $x \in (0, +\infty)$, το σύνολο τιμών είναι το $(-\infty, +\infty)$. Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbf{R}$.

Επίσης η f δεν έχει ακρότατα, αφού είναι γνησίως αύξουσα σε δυο ανοιχτά διαστήματα.

- iv. Από τα όρια $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, έπεται ότι η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x = 0$, δηλαδή τον άξονα $y'y$.

Πλάγια ασύμπτωτη δεν έχει, αφού

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0,$$

όμως

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 0 \cdot x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \ln x = +\infty.$$

Ομοίως και στο $-\infty$.

Άσκηση 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{4}{x}, x \neq 0$.

- Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ με $x_0 \neq 0$.
- Να δείξετε ότι το τρίγωνο το οποίο σχηματίζει η προηγούμενη εφαπτομένη με τους άξονες έχει σταθερό εμβαδό.
- Αν Α και Β τα σημεία που η εφαπτομένη στο Μ τέμνει τους άξονες, να δείξετε ότι το Μ είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ.

Λύση

- Ισχύει: $f'(x) = -\frac{4}{x^2}$, οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο

$$M(x_0, f(x_0)) \text{ είναι: } y - \frac{4}{x_0} = -\frac{4}{x_0^2}(x - x_0) \quad (1)$$

- Θα βρούμε σε ποια σημεία τέμνει η εφαπτομένη τους άξονες:

$$\text{για } x=0 \text{ η (1) γίνεται } y - \frac{4}{x_0} = -\frac{4}{x_0^2}(-x_0) \Leftrightarrow y = \frac{8}{x_0}$$

$$\text{και για } y=0 \text{ η (1) γίνεται } -\frac{4}{x_0} = -\frac{4}{x_0^2}(x - x_0) \Leftrightarrow x = 2x_0.$$

Άρα η (1) τέμνει τους άξονες στα σημεία $A\left(0, \frac{8}{x_0}\right)$ και $B(2x_0, 0)$.

Το εμβαδό του ορθογωνίου τριγώνου ΟΑΒ ισούται με

$$(OAB) = \frac{1}{2} \cdot (OA) \cdot (OB) = \frac{1}{2} \left| \frac{8}{x_0} \right| |2x_0| = 8 \text{ τ.μ,}$$

άρα είναι σταθερό.

- Το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ έχει συντεταγμένες:

$$\left(\frac{2x_0 + 0}{2}, \frac{\frac{8}{x_0} + 0}{2} \right) \text{ δηλαδή } \left(x_0, \frac{4}{x_0} \right), \text{ άρα είναι το σημείο Μ.}$$

Άσκηση 5

Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} x^4 + 5x, & x \geq 0 \\ 5\eta\mu x, & x < 0 \end{cases}.$$

Λύση

Η πρώτη παράγωγος στα ανοιχτά διαστήματα είναι:

$$f'(x) = \begin{cases} 4x^3 + 5, & x > 0 \\ 5\sigma\upsilon\nu x, & x < 0 \end{cases}$$

Θα εξετάσουμε αν είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$ με τον ορισμό της παραγώγου:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + 5x - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x^3 + 5) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5\eta\mu x - 0}{x} = 5.$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$ και $f'(0) = 5$.

Η δεύτερη παράγωγος στα ανοιχτά διαστήματα είναι:

$$f''(x) = \begin{cases} 12x^2, & x > 0 \\ -5\eta\mu x, & x < 0 \end{cases}$$

Στο $x = 0$ έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 + 5 - 5}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (4x^2) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5\sigma\upsilon\nu x - 5}{x} = 5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0.$$

Άρα $f''(0) = 0$, οπότε έχουμε:

$$f''(x) = \begin{cases} 12x^2, & x \geq 0 \\ -5\eta\mu x, & x < 0 \end{cases}$$

Άσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3x + 1$. Να βρείτε αν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f στα οποία η εφαπτομένη:

- i. να είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x$.
- ii. να σχηματίζει γωνία 135° με τον άξονα $x'x$.
- iii. να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.
- iv. να είναι κάθετη στην ευθεία $y = \frac{1}{2}x$.

Λύση

Ισχύει $f'(x) = (x^2 - 3x + 1)' = 2x - 3$.

- i. Η ευθεία $y = x$ έχει συντελεστή διεύθυνσης 1, άρα πρέπει $f'(x) = 1 \Leftrightarrow 2x - 3 = 1 \Leftrightarrow x = 2$ και $f(2) = -1$, άρα υπάρχει ένα σημείο, το $A(2, -1)$ στο οποίο η εφαπτομένη να είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x$.
- ii. Επειδή $\varepsilon\varphi 135^\circ = -1$, πρέπει $f'(x) = -1 \Leftrightarrow 2x - 3 = -1 \Leftrightarrow x = 1$. Επίσης $f(1) = -1$, άρα υπάρχει ένα σημείο, το $B(1, -1)$ στο οποίο η εφαπτομένη να σχηματίζει γωνία 135° με τον άξονα $x'x$.
- iii. Πρέπει $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ και $f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{5}{4}$, άρα υπάρχει ένα σημείο, το $\Gamma\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}\right)$ στο οποίο η εφαπτομένη να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.
- iv. Επειδή ο συντελεστής διεύθυνσης είναι $\frac{1}{2}$, πρέπει ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης να είναι -2 , οπότε $f'(x) = -2 \Leftrightarrow 2x - 3 = -2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ και $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$, άρα υπάρχει ένα σημείο, το $\Delta\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ στο οποίο η εφαπτομένη είναι κάθετη στην ευθεία $y = \frac{1}{2}x$.

Άσκηση 7

Να παραγωγίσετε τις παρακάτω συναρτήσεις

i. $x^{\eta\mu x}, x > 0$

ii. $2^{x \cdot \ln x}, x > 0$

iii. $\sqrt{5x^8 + 1}$

Λύση

i. $x^{\eta\mu x} = (e^{\ln x})^{\eta\mu x} = e^{\ln x \cdot \eta\mu x}$, οπότε θέτοντας

$$u = \ln x \cdot \eta\mu x \text{ έχουμε}$$

$$(x^{\eta\mu x})' = (e^{\ln x \cdot \eta\mu x})' = (e^u)' =$$

$$e^u \cdot u' = e^{\ln x \cdot \eta\mu x} \cdot (\ln x \cdot \eta\mu x)' = x^{\eta\mu x} \cdot \left(\frac{\eta\mu x}{x} + \ln x \cdot \sigma\upsilon\nu x \right).$$

ii. Έστω $u = x \cdot \ln x$, οπότε

$$(2^{x \cdot \ln x})' = (2^u)' = 2^u \cdot \ln 2 \cdot u' = 2^{x \cdot \ln x} \cdot \ln 2 \cdot (x \cdot \ln x)' = 2^{x \cdot \ln x} \cdot \ln 2 \cdot (\ln x + 1).$$

iii. Έστω $u = 5x^8 + 1$, οπότε $(\sqrt{5x^8 + 1})' = (\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} u' = \frac{(5x^8 + 1)'}{2\sqrt{5x^8 + 1}} = \frac{20x^7}{\sqrt{5x^8 + 1}}$

Άσκηση 8

Αν για τη συνάρτηση f ισχύει:

$$-2x+1 \leq f(x) \leq x^4-2x+1 \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R}, \quad (1)$$

τότε

- i. να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x=0$
- ii. να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$ και ισχύει $f'(0)=-2$.

Λύση

- i. Για $x=0$ η (1) γίνεται $1 \leq f(0) \leq 1$, άρα $f(0)=1$. Επίσης

$$\lim_{x \rightarrow 0} (-2x+1) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^4-2x+1) = 1, \text{ οπότε σύμφωνα με το κριτήριο} \\ \text{παρεμβολής θα είναι και } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1.$$

Επομένως η f είναι συνεχής στο $x=0$, αφού $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 1$.

- ii. Η σχέση (1) γίνεται:

$$-2x+1-1 \leq f(x)-f(0) \leq x^4-2x+1-1 \Leftrightarrow -2x \leq f(x)-f(0) \leq x^4-2x, \\ \text{οπότε διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:}$$

- αν $x > 0$, τότε

$$\frac{-2x}{x} \leq \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \leq \frac{x^4-2x}{x} \Leftrightarrow -2 \leq \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \leq x^3-2 \text{ και επειδή}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (-2) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^3-2) = -2, \text{ έπεται από το κριτήριο παρεμβολής ότι}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -2.$$

- αν $x < 0$, τότε

$$\frac{-2x}{x} \geq \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \geq \frac{x^4-2x}{x} \Leftrightarrow -2 \geq \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \geq x^3-2 \text{ και επειδή}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (-2) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^3-2) = -2, \text{ έπεται από το κριτήριο παρεμβολής ότι}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -2.$$

Από τα δυο προηγούμενα προκύπτει ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$ και $f'(0)=-2$.

Άσκηση 9

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ μια συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 > 0$. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(x_0)}}{x^2 - x_0^2}$$

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^3(x) - f^3(x_0)}{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}$$

Λύση

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , ισχύει $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Οπότε

$$\begin{aligned} \text{i. } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(x_0)}}{x^2 - x_0^2} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(\sqrt{f(x)})^2 - (\sqrt{f(x_0)})^2}{(x - x_0)(x + x_0)(\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(x_0)})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{(x + x_0)(\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(x_0)})} = \frac{f'(x_0)}{4 \cdot x_0 \cdot \sqrt{f(x_0)}}. \end{aligned}$$

(Αφού η f είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στο x_0 , οπότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{f(x_0)}.)$$

$$\begin{aligned} \text{ii. } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^3(x) - f^3(x_0)}{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{[f(x) - f(x_0)][f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0)](\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{x_0})^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} \left[[f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0)](\sqrt{x} + \sqrt{x_0}) \right] = \\ &= 6 \cdot f'(x_0) \cdot f^2(x_0) \cdot \sqrt{x_0}. \end{aligned}$$

(Αφού η f είναι συνεχής στο x_0 , οπότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ και

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f^2(x) = f^2(x_0))$$

Άσκηση 10

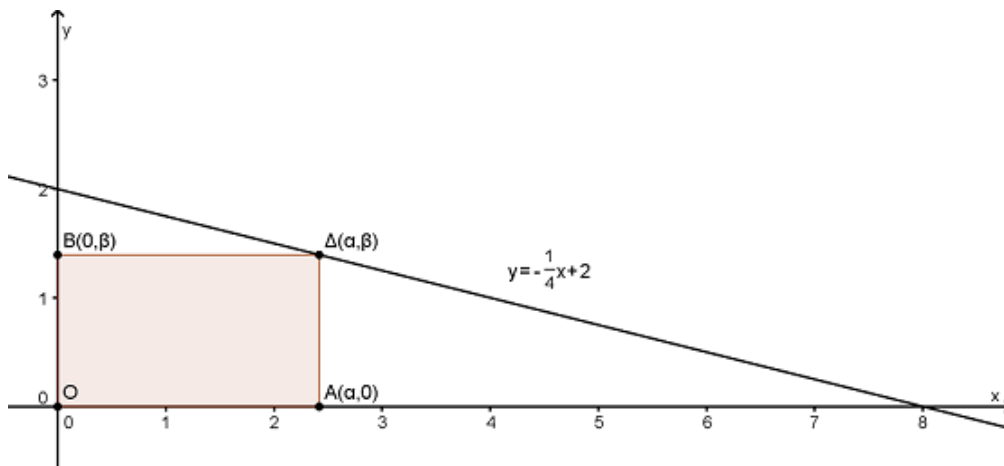
Θεωρούμε ορθογώνιο, του οποίου η μια κορυφή είναι το σημείο $O(0,0)$, δυο πλευρές βρίσκονται πάνω στους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy και η τέταρτη κορυφή κινείται πάνω στην ευθεία $y = -\frac{1}{4}x + 2$.

Να βρείτε τις διαστάσεις του α, β ώστε να έχει μέγιστο εμβαδό.

Λύση

Το εμβαδό του ορθογωνίου ισούται με $E = \alpha \cdot \beta$, όπου α, β θετικοί πραγματικοί. Η τέταρτη κορυφή (βλέπε σχήμα) είναι η $\Delta(\alpha, \beta)$,

η οποία ανήκει στην ευθεία με εξίσωση $y = -\frac{1}{4}x + 2$, οπότε ισχύει $\beta = -\frac{1}{4}\alpha + 2$.



Έτσι το εμβαδό του ορθογωνίου γίνεται

$E(\alpha) = \alpha \cdot \left(-\frac{1}{4}\alpha + 2\right) = -\frac{1}{4}\alpha^2 + 2\alpha$ με $\alpha \in (0, 8)$, αφού από την ανισότητα $\beta > 0$ έχουμε

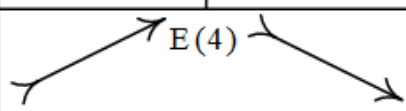
$$-\frac{1}{4}\alpha + 2 > 0 \Leftrightarrow \alpha < 8.$$

Παραγωγίζοντας τη συνάρτηση του εμβαδού παίρνουμε:

$$E'(\alpha) = \left(-\frac{1}{4}\alpha^2 + 2\alpha\right)' = -\frac{1}{2}\alpha + 2, \text{ οπότε } E'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 4 \text{ και}$$

$$E'(\alpha) > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\alpha + 2 > 0 \Leftrightarrow \alpha < 4.$$

Από τα προηγούμενα προκύπτει ο παρακάτω πίνακας:

α	0	4	8
$E'(\alpha)$	+		-
$E(\alpha)$			

Άρα η συνάρτηση του Εμβαδού είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, 4]$, γνησίως φθίνουσα στο $[4, 8)$ και είναι συνεχής στο 4, άρα παρουσιάζει ολικό μέγιστο για

$$\alpha = 4. \text{ Οπότε } \beta = -\frac{1}{4}4 + 2 = 1.$$

Άσκηση 11

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 5}{x} = 2.$$

Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και $f'(0) = 2$.

Λύση

Αρχικά θα δείξουμε ότι $f(0) = 5$.

Θέτουμε $g(x) = \frac{f(x) - 5}{x}$, με $x \neq 0$, οπότε $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 2$.

Λύνουμε επίσης ως προς $f(x)$ και έχουμε:

$$f(x) = x \cdot g(x) + 5, \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} [x \cdot g(x) + 5] = 0 \cdot 2 + 5 = 5.$$

Όμως η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ που σημαίνει $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 5$.

Έτσι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 5}{x} = 2.$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και $f'(0) = 2$.

Άσκηση 12

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = e^x \cdot \eta\mu x$. Να δείξετε ότι:

$$f^{(3)}(x) + 2 \cdot f'(x) = 2f''(x)$$

Λύση

Έχουμε

$$f'(x) = (e^x \cdot \eta\mu x)' = e^x \cdot \eta\mu x + e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x,$$

$$f''(x) = (e^x \cdot \eta\mu x + e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x)' = 2e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x \text{ και}$$

$$f^{(3)}(x) = (2e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x)' = 2e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x - 2e^x \cdot \eta\mu x.$$

Οπότε

$$f^{(3)}(x) + 2 \cdot f'(x) = 2e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x - 2e^x \cdot \eta\mu x + 2(e^x \cdot \eta\mu x + e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x) =$$

$$4e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x = 2f''(x).$$

Άρα

$$f^{(3)}(x) + 2 \cdot f'(x) = 2f''(x).$$

Άσκηση 13

Να δείξετε ότι:

$$2\ln(x-1) \leq x-3+\ln 4 \text{ για κάθε } x > 1.$$

Λύση

Επειδή

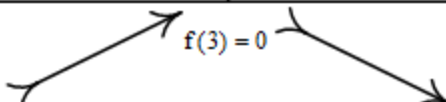
$$2\ln(x-1) \leq x-3+\ln 4 \Leftrightarrow 2\ln(x-1) - x + 3 - \ln 4 \leq 0$$

αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση $f(x) = 2\ln(x-1) - x + 3 - \ln 4$ με $x > 1$, έχει ολικό μέγιστο το 0.

Πράγματι

$$f'(x) = \frac{2}{x-1} - 1 = \frac{3-x}{x-1},$$

επίσης $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ και $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 3$, οπότε σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών

x	1	3	$+\infty$
f'(x)	+		-
f(x)			

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, 3]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[3, +\infty)$ και επειδή είναι συνεχής στο $x = 3$ παρουσιάζει στο σημείο αυτό ολικό μέγιστο το $f(3) = 0$, άρα $f(x) \leq 0$ για κάθε $x > 1$.

Άσκηση 14

Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^3$ στο σημείο της $A(1,1)$ εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = 2x^2 + 7x$.

Λύση

Οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες στο $\mathbf{R}$ ως πολυωνυμικές.

Έχουμε $f'(x) = 3x^2$, οπότε $f'(1) = 3$.

Έτσι η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(1,1)$ είναι:

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \text{ ή}$$

$$\varepsilon : y = 3x - 2.$$

Για να εφάπτεται η ε και στη C_g , θα πρέπει να υπάρχει ένα x_0 τέτοιο, ώστε

$$g'(x_0) = 3 \quad (1)$$

$$\text{και } g(x_0) = 3x_0 - 2. \quad (2)$$

Η (1) μας δίνει:

$$g'(x_0) = 3 \Leftrightarrow 4x_0 + 7 = 3 \Leftrightarrow x_0 = -1$$

και $g(-1) = 2(-1)^2 + 7(-1) = -5$, οπότε η (2) γίνεται

$$-5 = 3(-1) - 2 \text{ το οποίο ισχύει.}$$

Άρα η ευθεία $\varepsilon : y = 3x - 2$ εφάπτεται στη C_f στο $A(1,1)$ και στη C_g στο $B(-1, -5)$.

Άσκηση 15

Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^4 + 24x^2 + 4x - 40 = 0$ έχει το πολύ δυο πραγματικές ρίζες.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^4 + 24x^2 + 4x - 40, x \in \mathbf{R}$.

Υποθέτουμε ότι η f έχει τρεις ρίζες $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \in \mathbf{R}$ με $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$. Επειδή η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ ως πολυωνυμική και επιπλέον $f(\rho_1) = f(\rho_2) = f(\rho_3) = 0$, εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στα διαστήματα $[\rho_1, \rho_2]$ και $[\rho_2, \rho_3]$.

Έτσι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1) = 0$ και επίσης

υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (\rho_2, \rho_3)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_2) = 0$.

Όμως $f'(x) = 4x^3 + 48x + 4$, η οποία είναι επίσης συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ ως πολυωνυμική και επιπλέον $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$, οπότε εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για την f' στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$, που σημαίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\gamma \in (\xi_1, \xi_2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\gamma) = 0$, το οποίο είναι άτοπο, αφού

$$f''(x) = 12x^2 + 48 > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R}.$$

Άρα η συνάρτηση f , οπότε και η εξίσωση $x^4 + 24x^2 + 4x - 40 = 0$ έχει το πολύ δυο πραγματικές ρίζες.

Άσκηση 16

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

- i. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: y = -\frac{1}{2}x + 7$.
- ii. Να βρεθούν τα σημεία επαφής των εφαπτόμενων της C_f που διέρχονται από το $O(0,0)$.
- iii. Υπάρχουν εφαπτόμενες που διέρχονται από σημείο $A(2,0)$;

Λύση

Έχουμε $f'(x) = 2x - 4$.

- i. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ε είναι $\lambda_\varepsilon = -\frac{1}{2}$, οπότε αν λ ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης θα ισχύει $\lambda \cdot \lambda_\varepsilon = -1 \Leftrightarrow \lambda = 2$.

Αν $B(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής της C_f με την εφαπτομένη, τότε

$$f'(x_0) = 2 \Leftrightarrow 2x_0 - 4 = 2 \Leftrightarrow x_0 = 3 \text{ και } f(3) = 0,$$

άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι κάθετη στην ευθεία

$\varepsilon: y = -\frac{1}{2}x + 7$ είναι η παρακάτω:

$$y - 0 = 2(x - 3) \text{ ή}$$

$$y = 2x - 6.$$

- ii. Έστω $\Gamma(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής της C_f με την εφαπτομένη, τότε η εξίσωση της εφαπτομένης δίνεται:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Επειδή η εφαπτομένη αυτή διέρχεται από το σημείο $O(0,0)$, θα ισχύει:

$$-f(x_0) = f'(x_0)(-x_0) \Leftrightarrow -x_0^2 + 4x_0 - 3 = -2x_0^2 + 4x_0 \Leftrightarrow$$

$$x_0^2 = 3 \Leftrightarrow x_0 = \pm\sqrt{3}$$

και $f(\sqrt{3}) = 6 - 4\sqrt{3}$, $f(-\sqrt{3}) = 6 + 4\sqrt{3}$.

Άρα τα σημεία επαφής είναι τα $\Gamma(\sqrt{3}, 6 - 4\sqrt{3})$ και $\Delta(-\sqrt{3}, 6 + 4\sqrt{3})$.

- iii. Έστω ότι υπάρχει εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από σημείο $A(2, 0)$ και $E(x_1, f(x_1))$ το σημείο επαφής της C_f με αυτήν, τότε η εξίσωση της εφαπτομένης δίνεται:

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1).$$

Επειδή η εφαπτομένη αυτή διέρχεται από το σημείο $A(2, 0)$, θα ισχύει:

$$-f(x_1) = f'(x_1)(2 - x_1) \Leftrightarrow -x_1^2 + 4x_1 - 3 = -2x_1^2 + 8x_1 - 8 \Leftrightarrow$$

$$x_1^2 - 4x_1 + 5 = 0,$$

το οποίο είναι άτοπο, αφού η τελευταία δευτεροβάθμια εξίσωση έχει αρνητική διακρίνουσα ($\Delta = -4 < 0$), άρα είναι αδύνατη, που σημαίνει ότι δεν υπάρχει εφαπτομένη της C_f που να διέρχεται από σημείο $A(2, 0)$.

Άσκηση 17

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + k \cdot x - 1$, όπου $k \in \mathbf{R}$.

- i. Αν η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0, f(0))$ είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y = 3x + 5$, να βρείτε την τιμή του k .
- ii. Αν $k = 2$ να δείξετε ότι η ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ είναι η ευθεία με εξίσωση $y = 2x - 1$.

Λύση

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbf{R}$.

- i. Έχουμε $f'(x) = e^x + k$.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας με εξίσωση $y = 3x + 5$, είναι $\lambda = 3$.

Για να είναι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0, f(0))$ παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y = 3x + 5$, θα πρέπει

$$f'(0) = \lambda = 3 \Leftrightarrow e^0 + k = 3 \Leftrightarrow k = 2.$$

- ii. Για $k = 2$ έχουμε $f(x) = e^x + 2x - 1$.

Για να είναι η ευθεία με εξίσωση $y = 2x - 1$ ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (2x - 1)] = 0.$$

$$\text{Έχουμε } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (2x - 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [e^x + 2x - 1 - (2x - 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$

Άρα η ευθεία με εξίσωση $y = 2x - 1$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Άσκηση 18

- i. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + 2\alpha x^3 + 24x^2 + 5x - 7$, $\alpha \in \mathbf{R}$. Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό διάστημα των τιμών του α , ώστε η συνάρτηση να είναι κυρτή στο $\mathbf{R}$
- ii. Για ποια τιμή του $\alpha \in \mathbf{R}$ η συνάρτηση του προηγούμενου ερωτήματος έχει σημείο καμπής το $A(1, f(1))$

Λύση

1. Έχουμε

$$f'(x) = 4x^3 + 6\alpha x^2 + 48x + 5,$$

$$f''(x) = 12x^2 + 12\alpha x + 48 = 12(x^2 + \alpha x + 4).$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = \alpha^2 - 16$.

Όταν $\Delta < 0$ τότε $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$, άρα η f είναι κυρτή στο $\mathbf{R}$.

Όταν $\Delta = 0$ τότε $f''(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$, όπου η ισότητα ισχύει για ένα μεμονωμένο σημείο, άρα η f είναι πάλι κυρτή στο $\mathbf{R}$.

Άρα πρέπει

$$\Delta \leq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 16 \leq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 \leq 16 \Leftrightarrow |\alpha| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq \alpha \leq 4.$$

2. Πρέπει

$$f''(1) = 0 \Leftrightarrow 12 + 12\alpha + 48 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -5.$$

Επίσης θα πρέπει να ελέγξουμε αν αλλάζει η κυρτότητα δεξιά και αριστερά του $x = 1$.

Για $\alpha = -5$, $f''(x) = 12(x^2 - 5x + 4)$ και

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12(x^2 - 5x + 4) = 0 \Leftrightarrow (x = 1 \text{ ή } x = 4)$. Οπότε έχουμε τον πίνακα προσήμου:

X	$-\infty$	1	4	$+\infty$	
$f''(x)$	+		-		+

Άρα η f είναι κυρτή στο $(-\infty, 1]$ και κοίλη στο $[1, 4]$. Επίσης επειδή είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(1, f(1))$, συνεπώς το $A(1, f(1))$ είναι σημείο καμπής της C_f .

Άρα για $\alpha = -5$ το $A(1, f(1))$ είναι σημείο καμπής της C_f .

Άσκηση 19

1. Να αποδείξετε τις παρακάτω ανισότητες:

i. $e^{x-1} \geq x$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

ii. $e^{x^2} \geq 1-x$, για κάθε $x \geq 0$.

2. Να δείξετε ότι $e^x + x \geq \frac{x^2}{2} + 1$, για κάθε $x \geq 0$.

Λύση

1. i. Έχουμε

$$e^{x-1} \geq x \Leftrightarrow e^{x-1} - x \geq 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^{x-1} - x$, $x \in \mathbf{R}$.

Θα αποδείξουμε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο το 0.

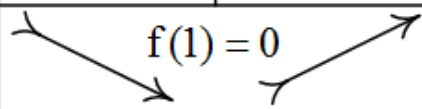
Ισχύει

$$f'(x) = e^{x-1} - 1,$$

$$\text{οπότε } f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x-1} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{x-1} = e^0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\text{και } f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{x-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{x-1} > e^0 \Leftrightarrow x > 1,$$

οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	○	+
$f(x)$	 $f(1) = 0$		

Έτσι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ και συνεχής στο $x = 1$, άρα στο σημείο αυτό παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f(1) = 0$.

Οπότε ισχύει

$$f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow f(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^{x-1} \geq x \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R}.$$

ii. Έχουμε

$$e^{x^2} \geq 1-x \Leftrightarrow e^{x^2} - 1 + x \geq 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^{x^2} - 1 + x$, $x \in [0, +\infty)$.

Θα αποδείξουμε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο το 0.

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$.

Ισχύει

$$f'(x) = (e^{x^2} - 1 + x)' = 2x \cdot e^{x^2} + 1,$$

οπότε $f'(x) > 0$, για κάθε $x > 0$, άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Έτσι

$$f(x) \geq f(0) = 0, \text{ για κάθε } x \in [0, +\infty),$$

που σημαίνει:

$$e^{x^2} \geq 1-x, \text{ για κάθε } x \geq 0.$$

2. Έχουμε

$$e^x + x \geq \frac{x^2}{2} + 1 \Leftrightarrow e^x + x - \frac{x^2}{2} - 1 \geq 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^x + x - \frac{x^2}{2} - 1$, $x \in [0, +\infty)$.

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$.

Ισχύει:

$$f'(x) = \left(e^x + x - \frac{x^2}{2} - 1 \right)' = e^x + 1 - x$$

και

$$f''(x) = (e^x + 1 - x)' = e^x - 1.$$

Επίσης

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ και}$$

$$x > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow f''(x) > 0,$$

άρα η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Οπότε για $x > 0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(0) = 2 > 0$, άρα και η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Επομένως έχει ολικό ελάχιστο στο $x = 0$, το $f(0) = 0$.

Ισχύει λοιπόν:

$$f(x) \geq f(0) = 0, \text{ για κάθε } x \in [0, +\infty), \text{ άρα}$$

$$e^x + x \geq \frac{x^2}{2} + 1, \text{ για κάθε } x \in [0, +\infty).$$

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{2x} + 5x$.

1. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
2. Να λύσετε την εξίσωση: $e^{2x^2} - e^{4x-2} = -5x^2 + 10x - 5$.

Λύση

- i. Η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $\mathbf{R}$. Για να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση αντιστρέφεται αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι γνησίως μονότονη. Πράγματι:

$$f'(x) = 2e^{2x} + 5 > 0,$$

άρα η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{R}$, συνεπώς είναι και «1-1», άρα αντιστρέφεται.

- ii. Η εξίσωση γίνεται ισοδύναμα:

$$e^{2x^2} - e^{4x-2} = -5x^2 + 10x - 5 \Leftrightarrow e^{2x^2} + 5x^2 = e^{2(2x-1)} + 5(2x-1) \Leftrightarrow$$

$$f(x^2) = f(2x-1)$$

και επειδή η f είναι «1-1» έπεται ότι

$$x^2 = 2x - 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Άσκηση 2

Δίνεται μια συνάρτηση $f(x): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$ με $f'(0)=1$ και για την οποία ισχύει:

$$f(x+y) = f(x)e^y + f(y)e^x \text{ για κάθε } x, y \in \mathbf{R}.$$

- i. Να υπολογίσετε το $f(0)$ και το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$.
- ii. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της με $f'(x_0) = f(x_0) + e^{x_0}$.

Λύση

- i. Για $x=y=0$ η σχέση

$$f(x+y) = f(x)e^y + f(y)e^x \quad (1)$$

γίνεται:

$$f(0) = f(0) \cdot 1 + f(0) \cdot 1 \Leftrightarrow f(0) = 0.$$

Επίσης $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 1$, όπου χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό της παραγώγου.

- ii. Από τη σχέση (1) παίρνουμε $f(x_0 + h) = f(x_0)e^h + f(h)e^{x_0}$ οπότε

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[f(x_0) \frac{e^h - 1}{h} + \frac{f(h)}{h} e^{x_0} \right] =$$

$$f(x_0) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} e^{x_0} = f(x_0) \cdot e^0 + 1 \cdot e^{x_0} = f(x_0) + e^{x_0},$$

αφού το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - e^0}{h - 0} = g'(0) = e^0$ με $g(x) = e^x$.

Άρα $f'(x_0) = f(x_0) + e^{x_0}$.

Άσκηση 3

Αν για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει:

$$\alpha^x + \beta^x \geq 5e^x - 3, \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R},$$

να δείξετε ότι $\alpha \cdot \beta = e^5$.

Λύση

Έχουμε $\alpha^x + \beta^x \geq 5e^x - 3 \Leftrightarrow \alpha^x + \beta^x - 5e^x + 3 \geq 0$ και θέτοντας

$$f(x) = \alpha^x + \beta^x - 5e^x + 3 \text{ παίρνουμε: } f(x) \geq 0 = f(0), \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R}.$$

Άρα το 0 είναι ολικό ελάχιστο της f στο 0 και επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο 0, (εσωτερικό σημείο του $\mathbf{R}$) έπεται από το θεώρημα Fermat ότι $f'(0) = 0$.

Όμως $f'(x) = \alpha^x \cdot \ln \alpha + \beta^x \cdot \ln \beta - 5e^x$, οπότε

$$f'(0) = 0 \Leftrightarrow \alpha^0 \ln \alpha + \beta^0 \ln \beta - 5e^0 = 0 \Leftrightarrow \ln(\alpha \cdot \beta) = 5 \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta = e^5.$$

Άσκηση 4

Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμες στο $(0,1)$ με

$$f(0) = f(1) = 0 \text{ και } f(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in (0,1).$$

- i. Να δείξετε ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle για τη συνάρτηση $h(x) = f^2(x)e^{g(x)}$ στο διάστημα $[0,1]$.
- ii. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε:

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = -\frac{g'(\xi)}{2}.$$

Λύση

- i. Οι συναρτήσεις $f^2(x), e^{g(x)}$ είναι συνεχείς στο $[0,1]$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Οπότε και η h είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.

Ομοίως οι συναρτήσεις $f^2(x), e^{g(x)}$ είναι παραγωγίσιμες στο $(0,1)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Οπότε και η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Επίσης $h(0) = h(1) = 0$, άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle για τη συνάρτηση h στο διάστημα $[0,1]$.

- ii. Είναι $h'(x) = 2f(x) \cdot f'(x) \cdot e^{g(x)} + f^2(x) \cdot e^{g(x)} \cdot g'(x)$ και από το θεώρημα Rolle έχουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε

$$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 2f(\xi) \cdot f'(\xi) \cdot e^{g(\xi)} + f^2(\xi) \cdot e^{g(\xi)} \cdot g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f(\xi) \cdot e^{g(\xi)} [2f'(\xi) + f(\xi) \cdot g'(\xi)] = 0 \Leftrightarrow 2f'(\xi) + f(\xi) \cdot g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = -\frac{g'(\xi)}{2}.$$

Άσκηση 5

Αν η ευθεία $y = 3x - 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, τότε

- i. να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x)$
ii. να βρείτε το $\lambda \in \mathbf{R}$ ώστε:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot f(x) - 3x^2 - \lambda^2 x + 2}{f(x) + \lambda x + 1} = -1$$

Λύση

Αφού η ευθεία $y = 3x - 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f

στο $+\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 3$ και $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - 3x] = -1$. Οπότε έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot f(x) - 3x^2 - \lambda^2 x + 2}{f(x) + \lambda x + 1} = -1 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left[(f(x) - 3x) - \lambda^2 + \frac{2}{x} \right]}{x \left[\frac{f(x)}{x} + \lambda + \frac{1}{x} \right]} = -1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{-1 - \lambda^2}{3 + \lambda} = -1 \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda = 2 \text{ ή } \lambda = -1).$$

Άσκηση 6

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[0,1]$ με $f(0) < 0$ και $f'(x) \neq 2$ για κάθε $x \in (0,1)$.

Δίνονται επίσης οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 με $z_1 = f(1) + f(0)i$ και

$$z_2 = -3 + f(0)i.$$

Αν $z_1 \cdot z_2 \in \mathbf{R}$ να δείξετε ότι υπάρχει ένα μοναδικό $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 2\xi$.

Λύση

Ισχύει

$$z_1 \cdot z_2 = [f(1) + f(0)i] \cdot [-3 + f(0)i] = [-3f(1) - f^2(0)] + [f(1)f(0) - 3f(0)]i.$$

Για να ισχύει $z_1 \cdot z_2 \in \mathbf{R}$ πρέπει

$$\operatorname{Im}(z_1 \cdot z_2) = 0, \text{ άρα } f(1)f(0) - 3f(0) = 0 \Leftrightarrow f(1)f(0) = 3f(0) \quad (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - 2x$, η οποία είναι συνεχής στο $[0,1]$, ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, επίσης ισχύει

$$g(0) \cdot g(1) = f(0)[f(1) - 2] = f(0)f(1) - 2f(0), \text{ το οποίο λόγω της (1) γίνεται}$$

$$g(0) \cdot g(1) = f(0) < 0, \text{ οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει}$$

τουλάχιστον μία ρίζα ξ της g στο $(0,1)$.

Επιπλέον ισχύει ότι $g'(x) = f'(x) - 2 \neq 0$ στο $(0,1)$.

Έστω ότι η g έχει δύο ρίζες ρ_1, ρ_2 στο $(0,1)$ με $0 < \rho_1 < \rho_2 < 1$. Τότε για τη g θα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle, αφού:

- η g είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$
- η g είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2)
- $g(\rho_1) = g(\rho_2)$

άρα θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi) = 0$, το οποίο είναι άτοπο.

Άρα η g έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

Άσκηση 7

Δίνεται συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$f(0) = f'(0) = 0 \text{ και } f''(0) = 2011.$$

Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{e^x \cdot \eta\mu x - x}$$

Λύση

Επειδή η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, συμπεραίνουμε ότι η f' υπάρχει και είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$.

Ομοίως και η f είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$.

Επίσης

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} (e^x \cdot \eta\mu x - x) = 0,$$

οπότε για να βρούμε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{e^x \cdot \eta\mu x - x}$ εφαρμόζουμε μια φορά τον κανόνα De L'Hospital και παίρνουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{e^x \cdot \eta\mu x - x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{(e^x \cdot \eta\mu x - x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{e^x \cdot \eta\mu x + e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x - 1}$$

Ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0) = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} (e^x \cdot \eta\mu x + e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x - 1) = 0,$$

άρα το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{e^x \cdot \eta\mu x + e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x - 1}$ είναι πάλι της μορφής $\left(\frac{0}{0}\right)$,

όμως δε θα εφαρμόσουμε ακόμα μια φορά τον κανόνα De L'Hospital, αφού θα προκύψει στον αριθμητή η $f''(x)$ για την οποία δε γνωρίζουμε αν είναι συνεχής.

Για να συνεχίσουμε με τον υπολογισμό του ορίου θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό της $f''(0)$.

$$\text{Είναι } f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x} = 2011, \text{ οπότε}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{e^x \cdot \eta\mu x + e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x - 1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f'(x)}{x}}{e^x \cdot \frac{\eta\mu x}{x} + \frac{e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x - 1}{x}} = \frac{2011}{1+1} = \frac{2011}{2},$$

αφού $\lim_{x \rightarrow 0} \left(e^x \cdot \frac{\eta\mu x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} e^x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = e^0 \cdot 1 = 1$ και

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x - 1 \right)'}{\left(x \right)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x - e^x \cdot \eta\mu x}{1} = 1. \text{ (κανόνας De L'}$$

Hospital)

Άρα $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{e^x \cdot \eta\mu x - x} = \frac{2011}{2}.$

Άσκηση 8

Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της γραφικής παράστασης της $f(x) = x^2$ που διέρχονται από το σημείο $A\left(\frac{1}{2}, -2\right)$.

Λύση

Έστω $B(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής της ζητούμενης εφαπτομένης με τη C_f .

Η παράγωγος της f ισούται με $f'(x) = 2x$, οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι:

$$y - x_0^2 = 2x_0(x - x_0) \quad (1)$$

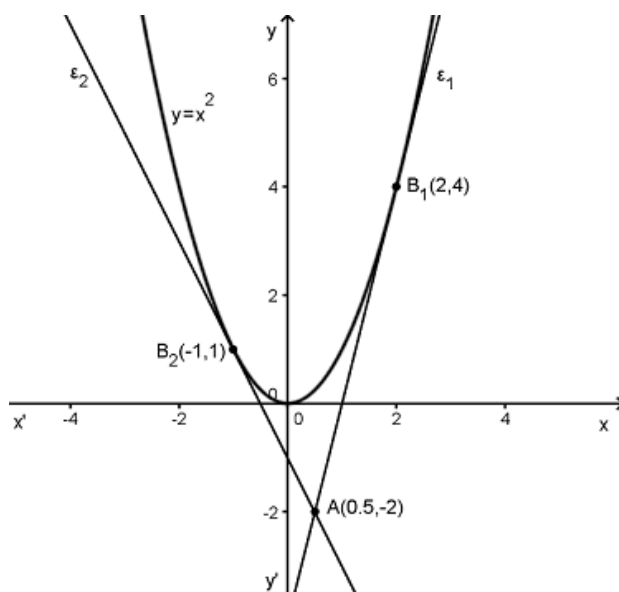
Επειδή η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο $A\left(\frac{1}{2}, -2\right)$ οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την **(1)** οπότε:

$$-2 - x_0^2 = 2x_0\left(\frac{1}{2} - x_0\right) \Leftrightarrow x_0^2 - x_0 - 2 = 0 \Leftrightarrow (x_0 = 2 \text{ ή } x_0 = -1),$$

και αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στην **(1)** παίρνουμε δυο εφαπτόμενες (Σχήμα 1) με εξισώσεις

$\varepsilon_1: y = 4x - 4$ και σημείο επαφής το $B_1(2, 4)$ και

$\varepsilon_2: y = -2x - 1$ και σημείο επαφής το $B_2(-1, 1)$.



Σχήμα 1

Άσκηση 9

Δίνεται ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και κοίλη στο $[0,3]$. Να δείξετε ότι

$$f(1) + f(2) > f(0) + f(3).$$

Λύση

Αφού η f είναι κοίλη στο $[0,3]$, έπεται ότι η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,3)$.

Επίσης

$$f(1) + f(2) > f(0) + f(3) \Leftrightarrow \frac{f(1) - f(0)}{1-0} > \frac{f(3) - f(2)}{3-2}, \quad (1)$$

και επειδή εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. για τη συνάρτηση f στα διαστήματα $[0,1]$ και $[2,3]$ υπάρχουν $\xi_1 \in (0,1)$ και $\xi_2 \in (2,3)$ τέτοια, ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(1) - f(0)}{1-0} \text{ και } f'(\xi_2) = \frac{f(3) - f(2)}{3-2}$$

Με βάση τα τελευταία η **(1)** γίνεται $f'(\xi_1) > f'(\xi_2)$, το οποίο ισχύει, αφού f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,3)$ και $\xi_1 < \xi_2$.

Άσκηση 10

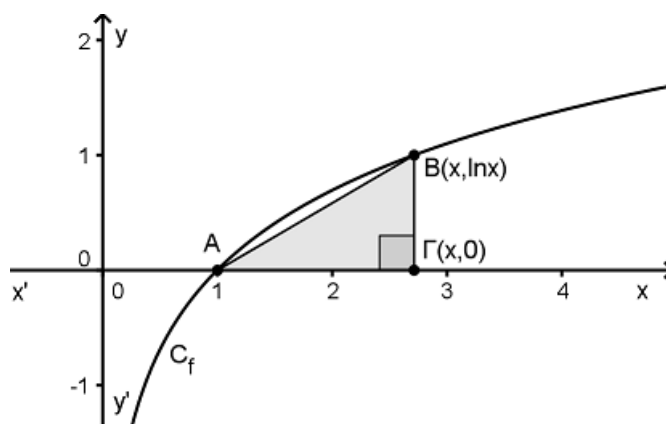
Να βρείτε το ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $A(1,0)$, $B(x, \ln x)$ και

$\Gamma(x,0)$, $x > 1$, τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το $x = 2\text{cm}$.

Δίνεται ότι ο ρυθμός μεταβολής του x είναι σταθερός και ίσος με $0,5\text{cm/sec}$.

Λύση

Έστω $f(x) = \ln x$.



Σχήμα 1

Το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $A(1,0)$, $B(x, \ln x)$ και

$\Gamma(x,0)$, $x > 1$, ισούται με $E = \frac{1}{2}(A\Gamma) \cdot (B\Gamma) = \frac{1}{2}(x-1) \cdot \ln x$ (βλέπε Σχήμα 1) και επειδή η τετμημένη x είναι συνάρτηση του χρόνου t , έχουμε ότι και το εμβαδό είναι συνάρτηση του χρόνου t με $E(t) = \frac{1}{2}[x(t)-1] \cdot \ln x(t)$. Παραγωγίζοντας βρίσκουμε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού τη χρονική στιγμή t_0 :

$$E'(t_0) = \frac{1}{2}x'(t_0) \cdot \ln x(t_0) + \frac{1}{2}[x(t_0)-1] \cdot \frac{x'(t_0)}{x(t_0)}$$

$$(\text{όπου } (\ln x(t))' = (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{x'(t)}{x(t)}, \text{ με } u = x(t))$$

και αντικαθιστώντας το $x(t_0) = 2\text{cm}$ και $x'(t_0) = 0,5\text{cm/sec}$ βρίσκουμε

$$E'(t_0) = \frac{1}{4} \ln 2 + \frac{1}{2}[2-1] \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \left(\ln 2 + \frac{1}{2} \right) \text{cm}^2 / \text{sec}$$

Άσκηση 11

- i. Να δείξετε ότι μια πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x-\rho)^2$ αν και μόνο αν $P(\rho) = P'(\rho) = 0$.
- ii. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ ώστε το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 3x - 1$ να έχει παράγοντα το $(x-1)^2$.

Λύση

- i. Έστω ότι η πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x-\rho)^2$. Τότε υπάρχει πολυώνυμο $\Pi(x)$ τέτοιο, ώστε $P(x) = (x-\rho)^2 \cdot \Pi(x)$, οπότε $P(\rho) = (\rho-\rho)^2 \cdot \Pi(\rho) = 0$. Επίσης $P'(x) = 2(x-\rho) \cdot \Pi(x) + (x-\rho)^2 \cdot \Pi'(x)$, οπότε

$$P'(\rho) = 2(\rho-\rho) \cdot \Pi(\rho) + (\rho-\rho)^2 \cdot \Pi'(\rho) = 0.$$

Αντιστρόφως έστω $P(\rho) = P'(\rho) = 0$. Αφού $P(\rho) = 0$, υπάρχει πολυώνυμο $Q(x)$ τέτοιο, ώστε

$$P(x) = (x-\rho) \cdot Q(x) \quad (1)$$

Παραγωγίζοντας έχουμε $P'(x) = Q(x) + (x-\rho) \cdot Q'(x)$, οπότε

$$P'(\rho) = Q(\rho) + (\rho-\rho) \cdot Q'(\rho) = 0 \text{ άρα } Q(\rho) = 0, \text{ άρα υπάρχει πολυώνυμο}$$

$\Pi(x)$ τέτοιο, ώστε $Q(x) = (x-\rho) \cdot \Pi(x)$. Αντικαθιστώντας το $Q(x)$ στην (1) παίρνουμε $P(x) = (x-\rho)^2 \cdot \Pi(x)$, άρα το $(x-\rho)^2$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $P(x)$.

- ii. Βάσει του προηγούμενου ερωτήματος θα ισχύει $P(1) = P'(1) = 0$.

Είναι $P(1) = \alpha + \beta - 3 - 1 = 0$, άρα $\alpha + \beta = 4$. Επίσης $P'(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x - 3$, οπότε $P'(1) = 3\alpha + 2\beta - 3 = 0$. Λύνουμε το σύστημα

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 4 \\ 3\alpha + 2\beta = 3 \end{cases} \text{ και βρίσκουμε } \begin{cases} \alpha = -5 \\ \beta = 9 \end{cases}$$

Άσκηση 12

Έστω $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$f(x) \geq e^{x-1} + \ln x + x^2 \text{ για κάθε } x > 0 \text{ και } f(1) = 2.$$

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1, 2)$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - e^{x-1} - \ln x - x^2$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων και επιπλέον

$$g(x) \geq 0 = g(1) \text{ για κάθε } x > 0.$$

Άρα η g έχει ελάχιστο το 0 για $x=1$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα

ισχύει $g'(1) = 0$. Όμως $g'(x) = f'(x) - e^{x-1} - \frac{1}{x} - 2x$, άρα

$$g'(1) = f'(1) - e^0 - \frac{1}{1} - 2 = 0 \Leftrightarrow f'(1) = 4.$$

Συνεπώς η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1, 2)$ θα είναι

$$y - 2 = 4(x - 1) \Leftrightarrow y = 4x - 2$$

Άσκηση 13

Θεωρούμε συνάρτηση f ορισμένη και δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(-3,3)$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$f^2(x) + 4f(x) + x^2 - 5 = 0 \text{ για κάθε } x \in (-3,3) \quad (1)$$

Να δείξετε ότι η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

Λύση

Παραγωγίζουμε δυο φορές τη σχέση (1), η οποία γίνεται

$$f^2(x) + 4f(x) + x^2 - 5 = 0 \Rightarrow 2f(x) \cdot f'(x) + 4f'(x) + 2x = 0 \Rightarrow$$

$$2[f'(x)]^2 + 2f(x) \cdot f''(x) + 4f''(x) + 2 = 0 \quad (2)$$

Έστω ότι το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f , τότε επειδή η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(-3,3)$, θα ισχύει $f''(x_0) = 0$ και αντικαθιστώντας στην (2) παίρνουμε

$$2[f'(x_0)]^2 + 2f(x_0) \cdot f''(x_0) + 4f''(x_0) + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2[f'(x_0)]^2 + 2 = 0 \text{ το οποίο είναι άτοπο.}$$

Άρα η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

Άσκηση 14

Δίνεται η συνεχής και παραγωγίσιμη συνάρτηση f , για την οποία ισχύει:

$$f(e^x \cdot \eta\mu x) = 2 \cdot e^x \text{ για κάθε } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

- i. Να δείξετε ότι $f'(0) = 2$.
- ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(0, f(0))$ είναι η $y = 2x + 2$.
- iii. Αν ένα σημείο κινείται πάνω στην προηγούμενη ευθεία και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 2cm/sec να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου.

Λύση

1. Παραγωγίζουμε τη σχέση $f(e^x \cdot \eta\mu x) = 2 \cdot e^x$ και παίρνουμε

$$\begin{aligned} f'(e^x \cdot \eta\mu x) \cdot (e^x \cdot \eta\mu x)' &= (2 \cdot e^x)' \Leftrightarrow \\ f'(e^x \cdot \eta\mu x) (e^x \cdot \eta\mu x + e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x) &= 2 \cdot e^x \end{aligned} \quad (4)$$

Για $x = 0$ η σχέση (4) μας δίνει $f'(0) = 2$.

2. Για $x = 0$ η σχέση $f(e^x \cdot \eta\mu x) = 2 \cdot e^x$ μας δίνει $f(0) = 2$. Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$y - 2 = 2(x - 0) \Leftrightarrow y = 2x + 2.$$

3. Η τετμημένη x του σημείου είναι συνάρτηση του χρόνου t και $x'(t) = 2\text{cm/sec}$, οπότε και η τεταγμένη του y του σημείου θα είναι συνάρτηση του χρόνου t και θα ισχύει

$$y(t) = 2x(t) + 2,$$

οπότε παραγωγίζουμε και έχουμε

$$y'(t) = 2x'(t) = 4\text{cm/sec}.$$

Άσκηση 15

1. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$. Να δείξετε ότι:
 - i. αν η f είναι άρτια, τότε η f' είναι περιττή.
 - ii. αν η f είναι περιττή, τότε η f' είναι άρτια.
2. Έστω $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ μια άρτια και παραγωγίσιμη συνάρτηση. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = (x^5 + \sin x) \cdot e^{f(x)} + \eta \mu x + x.$$

- i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$.
- ii. Να υπολογίσετε την τιμή $g'(0)$.

Λύση

1. i. Έστω ότι η f είναι άρτια, τότε ισχύει:

$$f(-x) = f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R}.$$

Παραγωγίζοντας και τα δυο μέλη της σχέσης έχουμε:

$$(f(-x))' = f'(x) \quad (1)$$

Θέτοντας $y = f(-x)$ και $u = -x$, έχουμε $y = f(u)$. Επομένως,

$$y' = (f(u))' = f'(u) \cdot u' = f'(-x) \cdot (-1) = -f'(-x),$$

άρα η (1) γίνεται $f'(-x) = -f'(x)$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

Συνεπώς η f' είναι περιττή.

- ii. Έστω ότι η f είναι περιττή, τότε ισχύει:

$$f(-x) = -f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R}.$$

Παραγωγίζοντας και τα δυο μέλη της σχέσης έχουμε:

$$(f(-x))' = -f'(x) \quad (2)$$

Θέτοντας $y = f(-x)$ και $u = -x$, έχουμε $y = f(u)$. Επομένως,

$$y' = (f(u))' = f'(u) \cdot u' = f'(-x) \cdot (-1) = -f'(-x),$$

άρα η (2) γίνεται $f'(-x) = f'(x)$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

Συνεπώς η f' είναι άρτια.

2. i. Η συνάρτηση $e^{f(x)}$ είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Οι $x^5 + \sigma\upsilon\nu x$ και $\eta\mu x + x$ είναι παραγωγίσιμες ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Οπότε η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

ii. Έχουμε:

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x^5 + \sigma\upsilon\nu x)' \cdot e^{f(x)} + (x^5 + \sigma\upsilon\nu x) \cdot (e^{f(x)})' + (\eta\mu x + x)' = \\ &= (5x^4 - \eta\mu x) \cdot e^{f(x)} + (x^5 + \sigma\upsilon\nu x) \cdot e^{f(x)} \cdot f'(x) + \sigma\upsilon\nu x + 1. \end{aligned}$$

Οπότε $g'(0) = e^{f(0)} \cdot f'(0) + \sigma\upsilon\nu 0 + 1 = 2$.

Στον προηγούμενο υπολογισμό χρησιμοποιήσαμε $f'(0) = 0$.

Πράγματι από το προηγούμενο ερώτημα η συνάρτηση f' είναι περιττή, οπότε για $x = 0$ έχουμε $f'(-0) = -f'(0) \Leftrightarrow 2f'(0) = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 0$.

Άσκηση 16

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3 \eta \mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

- i. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.
- ii. Να δείξετε ότι εφαρμόζεται το Θεώρημα Rolle για την f στο διάστημα $\left[\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}\right]$
- iii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\sigma \rho \frac{1}{x} = 3x$, έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα $\left(\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}\right)$.

Λύση

- i. Για $x \neq 0$ έχουμε

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^3 \eta \mu \frac{1}{x}}{x} = x^2 \eta \mu \frac{1}{x}.$$

Επίσης $\left| x^2 \eta \mu \frac{1}{x} \right| \leq x^2 \Leftrightarrow -x^2 \leq x^2 \eta \mu \frac{1}{x} \leq x^2$ και επειδή $\lim_{x \rightarrow 0} (-x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$,
έπεται από το κριτήριο παρεμβολής ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \eta \mu \frac{1}{x} = 0,$$

άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$.

- ii. Η συνάρτηση $\eta \mu \frac{1}{x}$ είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}\right]$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων, οπότε και η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}\right]$, ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.

Η συνάρτηση $\eta\mu\frac{1}{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}\right)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων, οπότε και η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}\right)$, ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

$$\text{Επίσης } f\left(\frac{1}{2\pi}\right) = \frac{1}{8\pi^3} \cdot \eta\mu(2\pi) = 0 \text{ και } f\left(\frac{1}{\pi}\right) = \frac{1}{\pi^3} \cdot \eta\mu(\pi) = 0.$$

Από τα προηγούμενα έπεται ότι εφαρμόζεται το Θεώρημα Rolle για την f στο διάστημα $\left[\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}\right]$.

iii. Από το ii) υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in \left(\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$.

Έτσι

$$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 3\xi^2 \cdot \eta\mu\frac{1}{\xi} + \xi^3 \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{1}{\xi} \cdot \left(-\frac{1}{\xi^2}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$3\xi \cdot \eta\mu\frac{1}{\xi} = \sigma\upsilon\nu\frac{1}{\xi} \Leftrightarrow \sigma\varphi\frac{1}{\xi} = 3\xi$$

Άρα η εξίσωση $\sigma\varphi\frac{1}{x} = 3x$, έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα

$$\left(\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}\right).$$

Άσκηση 17

Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x.$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$

Λύση

i. Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \cdot \ln x} \stackrel{u = x \cdot \ln x}{=} \lim_{u \rightarrow 0} e^u = 1, \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} u = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0.$$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)} \stackrel{u = x \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{=} \lim_{u \rightarrow 0} e^u = 1, \text{ αφού}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} u = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right)'}{\left(\frac{1}{x} \right)'} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x}{x+1} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x}{x+1} \right) = 0.$$

Άσκηση 18

Δίνεται η άρτια συνάρτηση $f: \mathbf{R}^* \rightarrow \mathbf{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$f(1) = 2 \text{ και}$$

$$x \cdot f'(x) = -3f(x) \text{ για κάθε } x \neq 0.$$

- i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = x^3 \cdot f(x)$ είναι σταθερή σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.
- ii. Να βρείτε τον τύπο της f .
- iii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

Λύση

- i. Έχουμε

$$g'(x) = (x^3 \cdot f(x))' = 3x^2 \cdot f(x) + x^3 \cdot f'(x) = 3x^2 \cdot f(x) + x^2 \cdot (-3f(x)) = 0$$

$$\text{άρα } g'(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty).$$

Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$, δηλαδή υπάρχουν σταθερές $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ τέτοιες, ώστε

$$g(x) = \begin{cases} c_1, & x > 0 \\ c_2, & x < 0 \end{cases}$$

Επειδή η f είναι άρτια έχουμε $f(1) = 2 \Leftrightarrow f(-1) = 2$ οπότε

$$g(1) = 1^3 \cdot 2 = 2 = c_1 \text{ και } g(-1) = (-1)^3 \cdot 2 = -2 = c_2.$$

Από τα προηγούμενα έπεται ότι

$$g(x) = \begin{cases} 2, & x > 0 \\ -2, & x < 0 \end{cases}$$

- ii. Για $x > 0$, $g(x) = 2 \Leftrightarrow x^3 \cdot f(x) = 2 \Leftrightarrow f(x) = \frac{2}{x^3}$.

$$\text{Για } x < 0, \quad g(x) = -2 \Leftrightarrow x^3 \cdot f(x) = -2 \Leftrightarrow f(x) = -\frac{2}{x^3}.$$

$$\text{Άρα } f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3}, & x > 0 \\ -\frac{2}{x^3}, & x < 0 \end{cases}$$

iii. Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$, έπεται ότι η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

Επίσης ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, άρα η ευθεία $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

Επειδή έχουμε οριζόντιες ασύμπτωτες της C_f στο $+\infty$ και στο $-\infty$, έτσι δεν έχουμε πλάγιες ασύμπτωτες.

Άσκηση 19

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x$.

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- Να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \lambda$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbf{R}$.
- Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της αν υπάρχουν.

Λύση

Το πεδίο ορισμού της $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x$ είναι το $\mathbf{R}$.

i. $f'(x) = 6x^2 - 30x + 24$ και

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 30x + 24 = 0 \Leftrightarrow (x = 1 \text{ ή } x = 4)$$

Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα

X	$-\infty$	1	4	$+\infty$	
$f'(x)$	+	○	-	○	+
$f(x)$		↗ 11	↘ -16	↗	

Η f είναι λοιπόν γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 1]$ και $[4, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1, 4]$. Επειδή είναι επίσης συνεχής στα σημεία 1 και 4, παρουσιάζει στη θέση $x = 1$ τοπικό μέγιστο το $f(1) = 11$ και στη θέση $x = 4$ τοπικό ελάχιστο το $f(4) = -16$.

- ii. Ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \text{ και επειδή η } f \text{ είναι συνεχής στο } \mathbf{R} \text{ τότε}$$

το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbf{R}$.

- iii. Τα επιμέρους σύνολα τιμών είναι

$$f((-\infty, 1]) = (-\infty, 11],$$

$$f([1,4]) = [-16,11] \text{ και}$$

$$f([4,+\infty)) = [-16,+\infty) \text{ και από τη μονοτονία της συνάρτησης προκύπτει ότι}$$

- Αν $\lambda < -16$ τότε η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει μια μοναδική λύση στο $(-\infty,1)$.
- Αν $\lambda = -16$ τότε η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει δυο ακριβώς λύσεις, την $x = 4$ και μια δεύτερη στο $(-\infty,1)$.
- Αν $-16 < \lambda < 11$ τότε η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει τρεις ακριβώς λύσεις, μια σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty,1)$, $(1,4)$ και $(4,+\infty)$.
- Αν $\lambda = 11$ τότε η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει δυο ακριβώς λύσεις, την $x = 1$ και μια δεύτερη στο $(4,+\infty)$.
- Αν $\lambda > 11$ τότε η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει μια μοναδική λύση στο $(4,+\infty)$.

iv. $f''(x) = 12x - 30$ και $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{5}{2}$. Οπότε έχουμε

x	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$	-		+

Άρα η f είναι κοίλη στο διάστημα $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right]$ και κυρτή στο $\left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$.

Επειδή η f'' μηδενίζεται στο σημείο $x_0 = \frac{5}{2}$ και εκατέρωθεν αλλάζει

πρόσημο το σημείο $A\left(\frac{5}{2}, f\left(\frac{5}{2}\right)\right)$ είναι σημείο καμπής της C_f .

Άσκηση 20

Δίνεται πολυωνυμική συνάρτηση P για την οποία ισχύει:

$$\left[P'(x)\right]^2 = P(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R} \text{ και } P'(1) = 2.$$

Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$.

Λύση

Πρώτα θα προσδιορίσουμε το βαθμό του πολυωνύμου P .

Έστω ότι ο βαθμός του $P(x)$ είναι ν , τότε ο βαθμός του $P'(x)$ είναι $\nu - 1$ και του

$\left[P'(x)\right]^2$ είναι $2(\nu - 1)$. Λόγω της ισότητας $\left[P'(x)\right]^2 = P(x)$, πρέπει να ισχύει:

$$2(\nu - 1) = \nu \Leftrightarrow \nu = 2.$$

Άρα το πολυώνυμο είναι δευτέρου βαθμού και θα είναι της μορφής:

$$P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \text{ με } \alpha \neq 0,$$

$$P'(x) = 2\alpha x + \beta,$$

οπότε

$$\left[P'(x)\right]^2 = P(x) \Leftrightarrow (2\alpha x + \beta)^2 = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \Leftrightarrow$$

$$4\alpha^2 x^2 + 4\alpha\beta x + \beta^2 = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 4\alpha^2 = \alpha & (1) \\ 4\alpha\beta = \beta & (2) \\ \beta^2 = \gamma & (3) \end{cases}$$

Η (1) μας δίνει

$$4\alpha^2 = \alpha \stackrel{\alpha \neq 0}{\Leftrightarrow} \alpha = \frac{1}{4}$$

και από τη σχέση $P'(1) = 2$ παίρνουμε

$$2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 + \beta = 2 \Leftrightarrow \beta = \frac{3}{2}.$$

Τέλος αντικαθιστούμε το $\beta = \frac{3}{2}$ στη σχέση **(3)** και έχουμε:

$$\gamma = \beta^2 = \frac{9}{4}.$$

Επίσης η σχέση **(2)** ισχύει αν αντικαταστήσουμε τους αριθμούς α και β .

$$\text{Έτσι } P(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}.$$

Άσκηση 21

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο. Αν για τους αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ με $\alpha < \beta < \gamma$ ισχύει $f(\alpha) < f(\beta) > f(\gamma)$, να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \gamma)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$.

Λύση

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$, μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής για την f στα διαστήματα $[\alpha, \beta]$ και $[\beta, \gamma]$.

Έτσι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}.$$

Όμως $f(\alpha) < f(\beta)$ άρα

$$f'(\xi_1) > 0 \quad (1)$$

Ομοίως υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (\beta, \gamma)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\gamma) - f(\beta)}{\gamma - \beta}$$

Όμως $f(\beta) > f(\gamma)$ άρα

$$f'(\xi_2) < 0 \quad (2)$$

Η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$ και από τις (1) και (2) έχουμε

$f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) < 0$, οπότε από το θεώρημα Bolzano έπεται ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\xi_1, \xi_2) \subseteq (\alpha, \gamma)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$.

Άσκηση 22

Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \eta \mu x e^{\frac{1}{x}}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0^-} x e^{\frac{1}{x}}$

Λύση

i. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \eta \mu x e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta \mu x}{x} \cdot x e^{\frac{1}{x}} = +\infty .$

γιατί

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta \mu x}{x} = 1$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \stackrel{u=\frac{1}{x}}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u}{u} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{(e^u)'}{(u)'} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u}{1} = +\infty .$$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0^-} x e^{\frac{1}{x}} = 0 \cdot 0 = 0 ,$

αφού

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} \stackrel{u=\frac{1}{x}}{=} \lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0 .$$

Άσκηση 23

Δίνεται η συνάρτηση $f : [1, 6] \rightarrow \mathbf{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[1, 6]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, 6)$ με $f(1) = f(6)$.

- i. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1, 6)$ τέτοιο, ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f να έχει στο σημείο

$A(x_0, f(x_0))$ οριζόντια εφαπτομένη.

- ii. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1, 6)$ με $\xi_1 \neq \xi_2$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1) + 4f'(\xi_2) = 0$.

Λύση

- i. Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1, 6]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, 6)$ και επίσης $f(1) = f(6)$, ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle, άρα:

υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1, 6)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$.

Επομένως στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ η C_f έχει οριζόντια εφαπτομένη.

- ii. Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής για τη συνάρτηση f στα διαστήματα $[1, 2]$ και $[2, 6]$.

Σχόλιο: Η επιλογή των διαστημάτων $[1, 2]$ και $[2, 6]$ έγινε, έτσι ώστε τα μήκη τους να είναι ανάλογα των συντελεστών της σχέσης $f'(\xi_1) + 4f'(\xi_2) = 0$, δηλαδή τους αριθμούς 1 και 4.

- η f είναι συνεχής στο $[1, 2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$, άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = f(2) - f(1). \quad (1)$$

ομοίως η f είναι συνεχής στο $[2, 6]$ και παραγωγίσιμη στο $(2, 6)$,

άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (2, 4)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(6) - f(2)}{6 - 2} = \frac{f(6) - f(2)}{4}. \quad (2)$$

Οπότε από τις **(1)** και **(2)** έχουμε:

$$f'(\xi_1) + 4f'(\xi_2) = f(2) - f(1) + 4 \cdot \frac{f(6) - f(2)}{4} = f(6) - f(1) = 0.$$

Άρα αποδείχτηκε.

Άσκηση 24

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - \eta\mu x$.

- i. Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbf{R}$.
- ii. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$.
- iii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

Λύση

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbf{R}$.

- i. Έχουμε

$$f'(x) = 2x - \sigma\upsilon\nu x$$

και

$$f''(x) = 2 + \eta\mu x.$$

Ισχύει

$$-1 \leq \eta\mu x \leq 1 \Leftrightarrow 2-1 \leq 2 + \eta\mu x \leq 2+1 \Leftrightarrow$$

$$1 \leq 2 + \eta\mu x \leq 3 \Leftrightarrow 1 \leq f''(x) \leq 3,$$

άρα $f''(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$, το οποίο συνεπάγεται ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbf{R}$.

- ii. Έχουμε

$$f'(0) = -\sigma\upsilon\nu 0 = -1 < 0,$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot \frac{\pi}{2} - \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} = \pi > 0$$

και επειδή η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, έπεται από το

θεώρημα Bolzano ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(x_0) = 0.$$

Όμως όπως δείξαμε στο προηγούμενο ερώτημα, $f''(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{R}$, που σημαίνει ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$.

iii. Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{R}$ και υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$, οπότε:

για $x < x_0 \Leftrightarrow f'(x) < f'(x_0) = 0$ και

για $x > x_0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(x_0) = 0$.

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, x_0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[x_0, +\infty)$.

Άσκηση 25

Δίνεται δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, για την οποία ισχύουν:

$$f(2) = 5, \quad f(1) = 3 \quad \text{και} \quad f(x) \leq 2x + 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbf{R}.$$

Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = 0$.

Λύση

Αφού η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$, σημαίνει ότι είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$.

Έχουμε $f(x) \leq 2x + 1 \Leftrightarrow f(x) - 2x - 1 \leq 0$, οπότε αν θέσουμε

$g(x) = f(x) - 2x - 1$, τότε η συνάρτηση g είναι επίσης συνεχής και παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbf{R}$, ως άθροισμα συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Επίσης $g(x) \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$ και επειδή $g(2) = f(2) - 4 - 1 = 0$ και

$g(1) = f(1) - 2 - 1 = 0$, έπεται ότι η g παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το 0 στα σημεία $x = 1$ και $x = 2$.

Έτσι σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα ισχύει:

$$g'(1) = f'(1) - 2 = 0 \Leftrightarrow f'(1) = 2 \quad \text{και}$$

$$g'(2) = f'(2) - 2 = 0 \Leftrightarrow f'(2) = 2.$$

Τέλος επειδή η f' είναι συνεχής στο $[1, 2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$ και

$f'(1) = f'(2)$, εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για την f' στο $[1, 2]$ και μας δίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = 0$.

ΘΕΜΑ Δ

Άσκηση 1

Έστω f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbf{R}$ για την οποία ισχύει: $f'(x) < x^2$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$. Να δείξετε ότι:

1. η $g(x) = 3f(x) - x^3$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{R}$
2. $f(2) - f(1) < 3$
3. υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) < 3$.

Λύση

1. Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) στο $\mathbf{R}$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων, οπότε για να τη μελετήσουμε ως προς τη μονοτονία αρκεί να βρούμε το πρόσημο της g' . Ισχύει

$$g'(x) = 3f'(x) - 3x^2 = 3[f'(x) - x^2] < 0$$

άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{R}$.

2. Η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{R}$, οπότε

$$g(2) < g(1) \Leftrightarrow 3f(2) - 8 < 3f(1) - 1 \Leftrightarrow f(2) - f(1) < \frac{7}{3} < 3.$$

3. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ επομένως και συνεχής, άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο $[1, 2]$, αφού

i. η f είναι συνεχής στο $[1, 2]$

ii. η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$,

οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = f(2) - f(1) < 3.$$

Άσκηση 2

- i. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $g(x) = x - \ln x$.
- ii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \ln x$.
- iii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Λύση

- i. Το πεδίο ορισμού της g είναι το $(0, +\infty)$ και είναι συνεχής σε αυτό.

Είναι $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$. Οπότε έχουμε τον επόμενο πίνακα πρόσημου για την g'

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		-	+

το οποίο σημαίνει ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$,

άρα παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=1$, το οποίο είναι το $g(1)=1$, άρα $g(x) \geq 1$ για κάθε $x > 0$.

Για το σύνολο τιμών βρίσκουμε τα εξής όρια:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - \ln x) = +\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty ,$$

αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right) = 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty} \right)}{=} 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 1.$$

Από τα προηγούμενα έπεται ότι το σύνολο τιμών είναι το $[1, +\infty)$.

Σχόλιο: μπορούμε να απαντήσουμε βρίσκοντας και το ένα από τα δύο όρια

ii. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $(0, +\infty)$.

Θεωρούμε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{\frac{1}{x}} \cdot \ln x) = -\infty$, αφού

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} e^y = +\infty.$$

Άρα η γραφική παράσταση της f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x = 0$.

Πλάγιες ασύμπτωτες:

Θεωρούμε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} \cdot \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{(\frac{\pm\infty}{\pm\infty})}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} \stackrel{y=\frac{1}{x}}{=} \lim_{y \rightarrow 0} e^y = 1,$$

$$\text{όμως } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 0 \cdot x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} \cdot \ln x = +\infty,$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty.$$

Άρα η γραφική παράσταση της f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

iii. Η παράγωγος της f ισούται με:

$$f'(x) = (e^{\frac{1}{x}} \cdot \ln x)' = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot \ln x + e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x} =$$

$$e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} (x - \ln x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} g(x)$$

και από το ερώτημα i) έπεται ότι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Στο ii) βρήκαμε επίσης ότι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} \cdot \ln x = +\infty$, άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbf{R}$.

Άσκηση 3

1. Να δείξετε ότι:

$$\ln x + \frac{1}{x} \geq 1 \text{ για κάθε } x > 0.$$

2. Να δείξετε ότι η $g(x) = \ln x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$.

3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = e^x \cdot \ln x$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
4. Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της συνάρτησης f του προηγούμενου ερωτήματος.

Λύση

1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \ln x + \frac{1}{x} - 1$, $x > 0$. Έχουμε

$h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$, οπότε σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών:

x	0	1	$+\infty$
$h'(x)$	-	○	+

Συνεπώς η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$, άρα έχει ολικό ελάχιστο το 0 για $x = 1$, δηλαδή ισχύει:

$$h(x) \geq h(1) \Leftrightarrow \ln x + \frac{1}{x} - 1 \geq 0 \text{ άρα αποδείχτηκε ότι}$$

$$\ln x + \frac{1}{x} \geq 1 \text{ για κάθε } x > 0.$$

2. Η $g(x) = \ln x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$ είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και

- $g\left(\frac{1}{e}\right) = \ln \frac{1}{e} + 2e - e^2 = -1 + 2e - e^2 = -(1-e)^2 < 0$,
- $g(1) = 1 > 0$.

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα x_0 της g στο $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$. Επίσης $g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} = \frac{x^2 - 2x + 2}{x^3} > 0$, αφού $x > 0$ και $x^2 - 2x + 2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$ επειδή έχει διακρίνουσα $\Delta = -4 < 0$.

Επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, το οποίο συνεπάγεται ότι η προηγούμενη ρίζα είναι μοναδική.

3. Έχουμε

$$f'(x) = (e^x \cdot \ln x)' = e^x \cdot \ln x + e^x \cdot \frac{1}{x} = e^x \cdot \left(\ln x + \frac{1}{x} \right)$$

και από το ερώτημα 1 έπεται ότι $f'(x) > 0$, συνεπώς η συνεχής συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα σε ανοικτό διάστημα, έπεται ότι δεν έχει ακρότατα.

Για το σύνολο τιμών βρίσκουμε τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x \cdot \ln x) = -\infty, \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1 > 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x \cdot \ln x) = +\infty, \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty.$$

Οπότε το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbf{R}$.

4. Βρίσκουμε τη δεύτερη παράγωγο της f :

$$f''(x) = \left(e^x \cdot \ln x + e^x \cdot \frac{1}{x} \right)' = e^x \cdot \ln x + e^x \cdot \frac{1}{x} + e^x \cdot \frac{1}{x} - e^x \cdot \frac{1}{x^2} = e^x \cdot \left(\ln x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = e^x \cdot g(x)$$

5. Από το ερώτημα 2 η g έχει μια ρίζα $x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$ και είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, οπότε:

για $x < x_0 \Rightarrow g(x) < g(x_0) = 0$ και για $x > x_0 \Rightarrow g(x) > g(x_0) = 0$ και έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών

x	0	x_0	$+\infty$
$f''(x)$	-		+

Από τα προηγούμενα η f είναι κοίλη στο $(0, x_0]$ και κυρτή στο $[x_0, +\infty)$ και το σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f , αφού αφ' ενός αλλάζει η κυρτότητα και αφ' ετέρου στο σημείο αυτό η f είναι παραγωγίσιμη άρα υπάρχει εφαπτομένη της C_f .

Άσκηση 4

Αν για τη συνάρτηση f ισχύουν:

f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ με $f(0) = 2$ και

$$f'(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x = f(x)(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) \text{ για κάθε } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

τότε να βρείτε τον τύπο της.

Λύση

Ισχύει

$$f'(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x = f(x)(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) \Leftrightarrow$$

$$f'(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x - f(x) \cdot \eta\mu x = f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$$

$$f'(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x + f(x) \cdot (\sigma\upsilon\nu x)' = f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow (f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x)' = f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x,$$

οπότε σύμφωνα με γνωστή εφαρμογή του βιβλίου σελίδα 252, υπάρχει μια σταθερά c τέτοια, ώστε

$$f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x = c \cdot e^x.$$

Επίσης $f(0) = 2$, οπότε έχουμε: $f(0) \cdot \sigma\upsilon\nu 0 = c \cdot e^0 \Leftrightarrow c = 2$.

$$\text{Άρα } f(x) = \frac{2 \cdot e^x}{\sigma\upsilon\nu x}.$$

Άσκηση 5

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^{\lambda x}}{x+1}$, $x > -1$ και $\lambda > 0$.

- Να δείξετε ότι η f έχει ένα ελάχιστο.
- Να βρείτε για ποια τιμή του λ το προηγούμενο ελάχιστο παίρνει τη μέγιστη τιμή του.

Λύση

- Θα μελετήσουμε την f ως προς τη μονοτονία.

$$f'(x) = \left(\frac{e^{\lambda x}}{x+1} \right)' = \frac{e^{\lambda x}(\lambda x + \lambda - 1)}{(x+1)^2} \text{ και } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1-\lambda}{\lambda} > -1, \text{ οπότε}$$

σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου

x	-1	$\frac{1-\lambda}{\lambda}$	$+\infty$
f'(x)	-	○	+

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(-1, \frac{1-\lambda}{\lambda}\right]$ και γνησίως

αύξουσα στο διάστημα $\left[\frac{1-\lambda}{\lambda}, +\infty\right)$, επομένως παρουσιάζει ολικό ελάχιστο

στο $x_0 = \frac{1-\lambda}{\lambda}$, το οποίο είναι το $f\left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right) = \lambda \cdot e^{1-\lambda}$.

- Έστω $g(\lambda) = \lambda \cdot e^{1-\lambda}$ με $\lambda > 0$. Θα μελετήσουμε τη g ως προς τη μονοτονία.

$g'(\lambda) = (\lambda \cdot e^{1-\lambda})' = e^{1-\lambda} - \lambda \cdot e^{1-\lambda} = e^{1-\lambda} \cdot (1-\lambda)$ η οποία έχει ρίζα το $\lambda = 1$ και για το πρόσημό της ισχύει

λ	0	1	$+\infty$
$g'(\lambda)$	+	○	-

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, 1]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$, επομένως παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $\lambda = 1$.

Άσκηση 6

Δίνεται ο μιγαδικός $z = e^x + (1 + xe^x)i, x \in \mathbf{R}$.

- Να δείξετε ότι: $\operatorname{Re}(z) \leq \operatorname{Im}(z)$.
- Να βρείτε τα $x \in \mathbf{R}$ για τα οποία η εικόνα του z βρίσκεται πάνω στην ευθεία $y = x$.
- Να βρείτε το σύνολο των τιμών που μπορεί να πάρει το $|z - \bar{z}|$.

Λύση

- i. Ισχύει

$$\operatorname{Re}(z) \leq \operatorname{Im}(z) \Leftrightarrow e^x \leq 1 + xe^x \Leftrightarrow 1 + xe^x - e^x \geq 0.$$

Θέτουμε $f(x) = 1 + xe^x - e^x$ και έχουμε

$$f'(x) = (1 + xe^x - e^x)' = xe^x \text{ και σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'(x)	-	○	+

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, οπότε έχει ολικό ελάχιστο στο $x = 0$, δηλαδή $f(x) \geq f(0) = 0 \Leftrightarrow 1 + xe^x - e^x \geq 0$.

- Ισχύει $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z) \Leftrightarrow f(x) = 0$ και η τελευταία ισχύει για τη θέση του ελάχιστου, δηλαδή για $x = 0$.
- Είναι: $|z - \bar{z}| = 2|1 + xe^x|$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = 1 + xe^x$, ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$
Θα βρούμε το σύνολο τιμών της:

$$g'(x) = xe^x + e^x = e^x(x + 1) \text{ και έχουμε}$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	-		+

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -1]$ και γνησίως αύξουσα στο

$[-1, +\infty)$, οπότε έχει ολικό ελάχιστο στο $x = -1$, δηλαδή

$$g(x) \geq g(-1) = \frac{e-1}{e} > 0.$$

Επίσης $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + xe^x) = 1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x) = 1$, αφού

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} \stackrel{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x)'}{(e^{-x})'} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0$$

και $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + xe^x) = +\infty$, άρα το σύνολο τιμών της g είναι το

$$\left[\frac{e-1}{e}, +\infty \right).$$

Επομένως $|z - \bar{z}| \in \left[2 \frac{e-1}{e}, +\infty \right).$

Άσκηση 7

1. Να λύσετε την εξίσωση $3^x + 2^x = 5^x$.
2. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ με $f'(x) = -2f(x)$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$.
 - i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = e^{2x} \cdot f(x)$ είναι σταθερή στο $\mathbf{R}$.
 - ii. Να βρείτε τον τύπο της f αν $f(0) = 1$.
 - iii. Αν h, φ παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $\mathbf{R}$, με

$$h'(x) + 2h(x) = \varphi'(x) + 2\varphi(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R}$$

και $h(0) = \varphi(0)$, τότε να δείξετε ότι $h = \varphi$.

Λύση

$$1. \text{ Έχουμε } 3^x + 2^x = 5^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{2}{5}\right)^x - 1 = 0 \quad (1).$$

Μια προφανής λύση της προηγούμενης εξίσωσης είναι η $x=1$. Θα δείξουμε ότι είναι μοναδική.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{2}{5}\right)^x - 1$, η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$.

Ισχύει:

$$f'(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x \cdot \ln \frac{3}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^x \cdot \ln \frac{2}{5} < 0,$$

$$\text{αφού } \frac{3}{5} < 1 \Leftrightarrow \ln \frac{3}{5} < \ln 1 = 0 \text{ και } \frac{2}{5} < 1 \Leftrightarrow \ln \frac{2}{5} < \ln 1 = 0.$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{R}$, οπότε η $x=1$ είναι μοναδική ρίζα της f , άρα και μοναδική ρίζα της εξίσωσης **(1)**.

i. Η g είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$ ως σύνθεση και γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.

Έχουμε

$$g'(x) = (e^{2x} \cdot f(x))' = 2e^{2x} \cdot f(x) + e^{2x} \cdot f'(x) = 2e^{2x} \cdot f(x) - 2e^{2x} \cdot f(x) = 0 \text{ για } \text{κάθε } x \in \mathbf{R}$$

Άρα η g είναι σταθερή στο $\mathbf{R}$.

ii. Από το προηγούμενο ερώτημα, έχουμε ότι:

υπάρχει $c \in \mathbf{R}$ τέτοιο, ώστε $g(x) = c$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$, άρα

$$e^{2x} \cdot f(x) = c \Leftrightarrow f(x) = c \cdot e^{-2x}.$$

Για $x = 0$ παίρνουμε:

$$f(0) = c \cdot e^0 \Leftrightarrow c = 1.$$

Άρα $f(x) = e^{-2x}$.

iii. Ισχύει:

$$h'(x) + 2h(x) = \varphi'(x) + 2\varphi(x) \Leftrightarrow (h(x) - \varphi(x))' = -2(h(x) - \varphi(x)) \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R},$$

οπότε από το i) ερώτημα έπεται ότι:

$h(x) - \varphi(x) = c \cdot e^{-2x}$, και για $x = 0$ παίρνουμε

$$h(0) - \varphi(0) = c \cdot e^0 \stackrel{h(0)=\varphi(0)}{\Leftrightarrow} c = 0.$$

Άρα $h = \varphi$.

Άσκηση 8

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x^2 + 4x + 3) \cdot e^x$.

- i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να αποδείξετε ότι έχει ένα ολικό ακρότατο.
- ii. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της C_f , αν υπάρχουν.
- iii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .
- iv. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$.
- v. Να αποδείξετε την ανισότητα:

$$(x^2 + 4x + 3) \cdot e^x \geq 7x + 3 \text{ για κάθε } x \geq -4 + \sqrt{3}.$$

Λύση

Η συνάρτηση $f(x) = (x^2 + 4x + 3)e^x$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbf{R}$.

- i. Παραγωγίζουμε την f ,

$$f'(x) = (2x + 4) \cdot e^x + (x^2 + 4x + 3) \cdot e^x = (x^2 + 6x + 7) \cdot e^x.$$

Έχουμε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 6x + 7) \cdot e^x = 0 \Leftrightarrow x = -3 \pm \sqrt{2}$, επίσης

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 4x + 3)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 4x + 3}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 4}{-e^{-x}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x + 4)'}{(-e^{-x})'} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^x = 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 4x + 3) \cdot e^x = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty,$$

οπότε σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα

X	$-\infty$	$-3-\sqrt{2}$	$-3+\sqrt{2}$	$+\infty$	
$f'(x)$	+	○	-	○	+
$f(x)$	0	T.M.		T.E.	$+\infty$

Έτσι η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, -3-\sqrt{2}]$ και $[-3+\sqrt{2}, +\infty)$, γνησίως φθίνουσα στο $[-3-\sqrt{2}, -3+\sqrt{2}]$ και συνεχής στο $\mathbf{R}$, οπότε στο $-3-\sqrt{2}$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο και στο $-3+\sqrt{2}$ τοπικό ελάχιστο.

Επίσης

$$f((-\infty, -3-\sqrt{2}]) = (0, f(-3-\sqrt{2})],$$

$$f([-3-\sqrt{2}, -3+\sqrt{2}]) = [f(-3+\sqrt{2}), f(-3-\sqrt{2})] \text{ και}$$

$$f([-3+\sqrt{2}, +\infty)) = [f(-3+\sqrt{2}), +\infty).$$

Το $f(-3+\sqrt{2})$ είναι ολικό ελάχιστο γιατί $f(-3+\sqrt{2}) < 0$.

Πράγματι το τριώνυμο $g(x) = x^2 + 4x + 3$ έχει ρίζες τους αριθμούς

-3 και -1 και $-3 < -3+\sqrt{2} < -1$, άρα $g(-3+\sqrt{2}) < 0$ γιατί ανάμεσα στις ρίζες το τριώνυμο είναι αρνητικό, και κατά συνέπεια και $f(-3+\sqrt{2}) < 0$.

Επειδή το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο $[f(-3+\sqrt{2}), +\infty)$ είναι φανερό ότι η f δεν έχει ολικό μέγιστο.

ii. $f''(x) = (2x+6) \cdot e^x + (x^2+6x+7) \cdot e^x = (x^2+8x+13) \cdot e^x$ και

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2+8x+13) \cdot e^x = 0 \Leftrightarrow x = -4 \pm \sqrt{3}.$$

Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου

X	$-\infty$	$-4-\sqrt{3}$	$-4+\sqrt{3}$	$+\infty$	
$f''(x)$	+	○	-	○	+

Άρα η f είναι κυρτή στα διαστήματα $(-\infty, -4 - \sqrt{3}]$ και $[-4 + \sqrt{3}, +\infty)$ και κοίλη στο διάστημα $[-4 - \sqrt{3}, -4 + \sqrt{3}]$.

Επειδή επίσης η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbf{R}$, που σημαίνει ότι έχει εφαπτομένη σε κάθε σημείο της γραφικής της παράστασης, έπεται ότι η C_f έχει δυο σημεία καμπής τα $A(-4 - \sqrt{3}, f(-4 - \sqrt{3}))$ και $B(-4 + \sqrt{3}, f(-4 + \sqrt{3}))$.

- iii. Στο ερώτημα ii) βρήκαμε ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, άρα η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την ευθεία $y = 0$.

Επίσης

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 + 4x + 3)e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{((x^2 + 4x + 3)e^x)'}{(x)'} =$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 6x + 7)e^x = +\infty$, άρα η f δεν έχει ούτε πλάγια ούτε οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$ δεν έχει επίσης κατακόρυφες ασύμπτωτες.

- iv. $f'(x) = (x^2 + 6x + 7)e^x \Rightarrow f'(0) = 7$ και $f(0) = 3$.

Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$ είναι:

$$y - 3 = 7 \cdot (x - 0) \text{ ή}$$

$$\varepsilon : y = 7x + 3.$$

- v. Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $[-4 + \sqrt{3}, +\infty)$ και $0 \in [-4 + \sqrt{3}, +\infty)$, οπότε στο διάστημα αυτό η C_f είναι «πάνω» από την εφαπτομένη στο $A(0, f(0))$, άρα

$$(x^2 + 4x + 3)e^x \geq 7x + 3 \text{ για κάθε } x \geq -4 + \sqrt{3}.$$

Άσκηση 9

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = e^x - \ln(x+1) - 1$.

- i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.
- iv. Αν για τους αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ με $2\alpha + \beta > 0$ και $\alpha + 2\beta - 1 > 0$, ισχύει:

$$e^{2\alpha+\beta-1} - \ln(2\alpha + \beta) + e^{\alpha+2\beta-2} - \ln(\alpha + 2\beta - 1) \leq 2$$

να υπολογίσετε τους α, β .

Λύση

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(-1, +\infty)$.

- i. Έχουμε

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{x+1} \text{ και}$$

$$f''(x) = e^x + \frac{1}{(x+1)^2}.$$

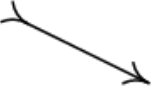
Επειδή $f''(x) > 0$ για κάθε $x > -1$, έπεται ότι η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-1, +\infty)$.

Επίσης $f'(0) = 0$, άρα

$$\text{για } -1 < x < 0 \stackrel{\text{f}\ddot{\text{u}}\text{ γν.}\alpha \text{ }\xi.}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(0) = 0 \text{ και}$$

$$\text{για } x > 0 \stackrel{\text{f}\ddot{\text{u}}\text{ γν.}\alpha \text{ }\xi.}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(0) = 0.$$

Επιπλέον $f(0) = 0$ και έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$		0	

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, οπότε παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x = 0$ το $f(0) = 0$.

ii. Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} [e^x - \ln(x+1) - 1] = +\infty, \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \ln(x+1) \stackrel{u=x+1}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln(u) = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow -1^+} [e^x - 1] = \frac{1}{e} - 1.$$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $[0, +\infty)$.

iii. Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει στο πεδίο ορισμού της $(-1, +\infty)$, μοναδική λύση την $x = 0$, αφού

$$\text{για } x < 0 \stackrel{\text{fίγν.φθ.}}{\Leftrightarrow} f(x) > f(0) = 0 \text{ και}$$

$$\text{για } x > 0 \stackrel{\text{fίγν.αξ.}}{\Leftrightarrow} f(x) > f(0) = 0.$$

iv. Η δοσμένη σχέση γίνεται ισοδύναμα

$$e^{2\alpha+\beta-1} - \ln(2\alpha+\beta) + e^{\alpha+2\beta-2} - \ln(\alpha+2\beta-1) \leq 2 \Leftrightarrow$$

$$e^{2\alpha+\beta-1} - \ln((2\alpha+\beta-1)+1) - 1 + e^{\alpha+2\beta-2} - \ln((\alpha+2\beta-2)+1) - 1 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$f(2\alpha+\beta-1) + f(\alpha+2\beta-2) \leq 0 \quad (1)$$

Από την τελευταία σχέση έπεται ότι

$$f(2\alpha+\beta-1) = f(\alpha+2\beta-2) = 0, \quad (2)$$

γιατί αν υποθέσουμε ότι π.χ. $f(2\alpha+\beta-1) \neq 0$ τότε, επειδή $f(x) \geq 0$ για κάθε $x > -1$, θα πρέπει $f(2\alpha+\beta-1) > 0$ και η (1) μας δίνει

$$f(\alpha+2\beta-2) \leq -f(2\alpha+\beta-1) < 0 \text{ δηλαδή } f(\alpha+2\beta-2) < 0, \text{ το οποίο}$$

είναι άτοπο. Επομένως $f(2\alpha + \beta - 1) = 0$ οπότε από την **(1)** και $f(\alpha + 2\beta - 2) = 0$.

Από την **(2)** και από το ερώτημα **iii)** έχουμε ότι

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta - 1 = 0 \\ \alpha + 2\beta - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \end{cases}.$$

Άσκηση 10

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^{\frac{1}{2x}}, x > 0$

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- Να δείξετε ότι:

$$\sqrt[12]{6} < \sqrt[10]{5} < \sqrt[6]{3}$$

Λύση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^{\frac{1}{2x}}, x > 0$.

- Βρίσκουμε πρώτα την παράγωγο της f .

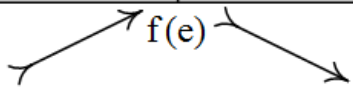
Αν $y = x^{\frac{1}{2x}} = (e^{\ln x})^{\frac{1}{2x}} = e^{\frac{\ln x}{2x}}$ και θέσουμε $u = \frac{\ln x}{2x}$, τότε $y = e^u$. Επομένως,

$$y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{\frac{\ln x}{2x}} \cdot \left(\frac{\ln x}{2x} \right)' = x^{\frac{1}{2x}} \cdot \frac{1 - \ln x}{2x^2}.$$

Έχουμε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$,

και $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow x < e$.

Οπότε σχηματίζουμε τον πίνακα

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	+	○	-
$f(x)$			

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, e]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[e, +\infty)$ και επειδή είναι συνεχής στο e ,

έχει στη θέση αυτή ολικό μέγιστο το $f(e)$

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[e, +\infty)$, οπότε ισχύει:

$$e < 3 < 5 < 6 \Leftrightarrow f(3) > f(5) > f(6) \Leftrightarrow 3^{\frac{1}{6}} > 5^{\frac{1}{10}} > 6^{\frac{1}{12}} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt[12]{6} < \sqrt[10]{5} < \sqrt[6]{3}$$

Άσκηση 11

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x^2 + 1) \cdot \ln x$, $x > 0$.

- i. Να δείξετε ότι $2x \cdot \ln x + \frac{1}{x} > 0$ για κάθε $x > 0$.
- ii. Να μελετήσετε την f ως τη μονοτονία και να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.
- iii. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$ τέτοιο, ώστε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ να είναι σημείο καμπής της C_f .
- iv. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

Λύση

i. Έχουμε $2x \cdot \ln x + \frac{1}{x} > 0 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} 2x^2 \cdot \ln x + 1 > 0$,

οπότε θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = 2x^2 \cdot \ln x + 1$, $x > 0$.

Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και

$$g'(x) = 4x \cdot \ln x + 2x = 2x(2 \ln x + 1)$$

και έχουμε

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x(2 \ln x + 1) = 0 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} \ln x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \text{ και}$$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x(2 \ln x + 1) > 0 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} \ln x > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x > \frac{1}{\sqrt{e}},$$

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow 2x(2 \ln x + 1) < 0 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} \ln x < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{\sqrt{e}}$$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right]$ και γνησίως

αύξουσα στο $\left[\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right)$, και επειδή είναι συνεχής στο $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ παρουσιάζει στο σημείο αυτό ολικό ελάχιστο το

$$g\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{e-1}{e} > 0.$$

Επομένως $g(x) \geq g\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) > 0$ για κάθε $x > 0$, άρα αποδείξαμε ότι

$$2x \ln x + \frac{1}{x} > 0 \text{ για κάθε } x > 0.$$

ii. Έχουμε $f'(x) = \left[(x^2 + 1) \ln x \right]' = 2x \ln x + x + \frac{1}{x} = x + \left(2x \ln x + \frac{1}{x} \right) > 0$, αφού

$$x > 0 \text{ και } 2x \ln x + \frac{1}{x} > 0 \text{ από το προηγούμενο ερώτημα.}$$

Άρα η συνεχής συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Επίσης το $x=1$ είναι προφανής λύση της εξίσωσης $f(x) = 0$, η οποία λόγω της μονοτονίας είναι και μοναδική.

iii. Έχουμε $f''(x) = \left(2x \ln x + x + \frac{1}{x} \right)' = 2 \ln x + 2 + 1 - \frac{1}{x^2} = 2 \ln x + 3 - \frac{1}{x^2}$ και

$$f^{(3)}(x) = \left(2 \ln x + 3 - \frac{1}{x^2} \right)' = \frac{2}{x} + \frac{2}{x^3} > 0 \text{ για κάθε } x > 0.$$

Αφού $f^{(3)}(x) > 0$ στο $(0, +\infty)$, έπεται ότι η συνεχής συνάρτηση f'' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Επίσης $f''\left(\frac{1}{e}\right) = 1 - e^2 < 0$ και $f''(1) = 2 > 0$ και επειδή η f'' είναι συνεχής

στο $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$, υπάρχει σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano ένα τουλάχιστον

$x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$ τέτοιο, ώστε $f''(x_0) = 0$, το οποίο λόγω της μονοτονίας της f'' είναι μοναδικό.

Επίσης έχουμε

$$0 < x < x_0 \stackrel{f'' \text{ γν.α. } \xi.}{\Leftrightarrow} f''(x) < f''(x_0) = 0 \text{ και}$$

$$x > x_0 \stackrel{f'' \text{ γν.α. } \xi.}{\Leftrightarrow} f''(x) > f''(x_0) = 0.$$

Επειδή η f'' μηδενίζεται στο σημείο x_0 και εκατέρωθεν αλλάζει πρόσημο το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f .

iv. Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{x} \right) \cdot \ln x = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$$

άρα η C_f δεν έχει ούτε πλάγια ούτε οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 1) \ln x = -\infty,$$

αφού $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 1) = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$. Άρα η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x = 0$.

Άσκηση 12

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln(x^2 + 1)$.

- i. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{R}$.
- ii. Να λύσετε την εξίσωση: $x - 4 = \ln 17 - \ln(x^2 + 1)$.
- iii. Να λύσετε την ανίσωση: $x^3 - x^2 > \ln \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1}$.

Λύση

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbf{R}$.

- i. Έχουμε

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + 1 + 2x}{x^2 + 1} = \frac{(x+1)^2}{x^2 + 1}.$$

Επειδή $f'(x) > 0$ στο $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ και η f είναι συνεχής στο -1 , έπεται ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{R}$.

- ii. Ισχύει

$$x - 4 = \ln 17 - \ln(x^2 + 1) \Leftrightarrow x + \ln(x^2 + 1) = 4 + \ln(4^2 + 1) \Leftrightarrow$$

$$f(x) = f(4)$$

και η f είναι «1-1» αφού είναι γνησίως αύξουσα, άρα η τελευταία σχέση μας δίνει:

$$x = 4.$$

- iii. Έχουμε:

$$x^3 - x^2 > \ln \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1} \Leftrightarrow x^3 - x^2 > \ln(x^4 + 1) - \ln(x^6 + 1) \Leftrightarrow$$

$$x^3 + \ln((x^3)^2 + 1) > x^2 + \ln((x^2)^2 + 1) \Leftrightarrow$$

$$f(x^3) > f(x^2) \stackrel{\text{fύγν.α ξ.}}{\Leftrightarrow} x^3 > x^2 \Leftrightarrow x^2 \cdot (x - 1) > 0 \Leftrightarrow x > 1.$$

Άσκηση 13

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 \cdot e^x$.

- i. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.
- ii. Να αποδείξετε ότι:

$$f'(x+1) > f(x+1) - f(x) \text{ για κάθε } x > 0.$$

Λύση

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbf{R}$.

- i. Έχουμε

$$f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x,$$

$$f''(x) = 2e^x + 2x \cdot e^x + 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = (x^2 + 4x + 2)e^x.$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \pm \sqrt{2}.$$

Σχηματίζουμε τον πίνακα προσήμου της f'' :

X	$-\infty$	$-2 - \sqrt{2}$	$-2 + \sqrt{2}$	$+\infty$
$f''(x)$	+	○	○	+

Έτσι συμπεραίνουμε ότι η f είναι κυρτή στα $(-\infty, -2 - \sqrt{2}]$ και $[-2 + \sqrt{2}, +\infty)$ και κοίλη στο $[-2 - \sqrt{2}, -2 + \sqrt{2}]$.

- ii. Επειδή $-2 + \sqrt{2} < 0$, έπεται ότι για $x > 0$ ισχύει $[x, x+1] \subseteq [-2 + \sqrt{2}, +\infty)$ και αφού $f''(x) > 0$ στο $(-2 + \sqrt{2}, +\infty)$ έπεται ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα $[-2 + \sqrt{2}, +\infty)$, άρα και στο $[x, x+1]$.

Η f είναι συνεχής στο $[x, x+1]$ και παραγωγίσιμη στο $(x, x+1)$, οπότε εφαρμόζεται το θεώρημα μέσης τιμής για την f στο $[x, x+1]$ οπότε:

υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x, x+1)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1-x} \Leftrightarrow f'(\xi) = f(x+1) - f(x).$$

Έτσι έχουμε

$$f'(x+1) > f(x+1) - f(x) \Leftrightarrow f'(x+1) > f'(\xi) \stackrel{\text{f}\ddot{\text{u}} \text{ g}\ddot{\text{u}} \text{v.} \alpha \ \xi.}{\Leftrightarrow} x+1 > \xi,$$

το οποίο ισχύει, άρα αποδείχτηκε η ζητούμενη σχέση.

Άσκηση 14

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\left[\frac{1}{2}, 3\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ με

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \text{ και } f(3) = 12.$$

- i. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in \left(\frac{1}{2}, 3\right)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $A(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y = 4x + 2$.
- ii. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\gamma \in \left(\frac{1}{2}, 3\right)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $B(\gamma, f(\gamma))$ να διέρχεται από το $O(0, 0)$.

Λύση

- i. Η συνάρτηση f συνεχής στο $\left[\frac{1}{2}, 3\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$, οπότε εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής και έχουμε:

υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in \left(\frac{1}{2}, 3\right)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(3) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{3 - \frac{1}{2}} = \frac{12 - 2}{\frac{5}{2}} = 4.$$

Επομένως η εφαπτομένη της C_f στο $A(\xi, f(\xi))$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = f'(\xi) = 4$, άρα είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y = 4x + 2$.

- ii. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $B(\gamma, f(\gamma))$ έχει εξίσωση:

$$y - f(\gamma) = f'(\gamma)(x - \gamma)$$

και αφού διέρχεται από το σημείο $O(0, 0)$, πρέπει

$$-f(\gamma) = f'(\gamma)(-\gamma) \Leftrightarrow f(\gamma) = \gamma f'(\gamma). \quad (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x \in \left[\frac{1}{2}, 3\right]$.

Η g είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{2}, 3\right]$, ως πηλίκo συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$, ως πηλίκo παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Επίσης:

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4 \text{ και}$$

$$g(3) = \frac{12}{3} = 4,$$

άρα $g\left(\frac{1}{2}\right) = g(3)$, που σημαίνει ότι εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για τη g στο $\left[\frac{1}{2}, 3\right]$. Έτσι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\gamma \in \left(\frac{1}{2}, 3\right)$ τέτοιο, ώστε

$$g'(\gamma) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(\gamma)\gamma - f(\gamma) \cdot 1}{\gamma^2} = 0 \Leftrightarrow f(\gamma) = \gamma f'(\gamma).$$

Άρα αποδείχτηκε η **(1)**, συνεπώς υπάρχει τουλάχιστον ένα $\gamma \in \left(\frac{1}{2}, 3\right)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $(\gamma, f(\gamma))$ να διέρχεται από το $O(0,0)$.

Άσκηση 15

1. Δίνεται συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη και κυρτή σε ένα διάστημα Δ . Να δείξετε ότι:

$$f(\alpha) + f(\beta) \geq 2 \cdot f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \text{ για κάθε } \alpha, \beta \in \Delta.$$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2-x^2}{x+1}$, $x > -1$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

- ii. Αν $\alpha > \frac{1}{e}, \beta > \frac{1}{e}$ να δείξετε ότι:

$$\frac{2 - \ln^2 \alpha}{\ln \alpha + 1} + \frac{2 - \ln^2 \beta}{\ln \beta + 1} \geq 2 \cdot \frac{2 - \ln^2(\sqrt{\alpha\beta})}{\ln(\sqrt{\alpha\beta}) + 1}$$

Λύση

1. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο διάστημα Δ , άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

- Αν $\alpha = \beta$, τότε η σχέση

$$f(\alpha) + f(\beta) \geq 2 \cdot f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

γίνεται

$$2 \cdot f(\alpha) \geq 2 \cdot f(\alpha)$$

το οποίο ισχύει.

- Έστω τώρα ότι $\alpha < \beta$. Τότε έχουμε

$$f(\alpha) + f(\beta) \geq 2 \cdot f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$f(\beta) - f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \geq f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) - f(\alpha) \quad (1)$$

Επίσης $\frac{\alpha + \beta}{2} - \alpha = \beta - \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\beta - \alpha}{2} > 0$, οπότε η (1) γίνεται

$$\frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}} \geq \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha} \quad (2)$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής για την f στα διαστήματα

$\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$ και $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$, οπότε:

υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha} \text{ και}$$

υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

Έτσι η (2) γίνεται $f'(\xi_2) \geq f'(\xi_1)$, το οποίο ισχύει αφού f' γνησίως αύξουσα και $\xi_2 \geq \xi_1$.

Επομένως αποδείχτηκε.

- Ομοίως αποδεικνύεται και για $\alpha > \beta$.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2-x^2}{x+1}$, $x > -1$.

Ισχύει

$$f'(x) = \frac{(2-x^2)'(x+1) - (2-x^2)(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{-x^2 - 2x - 2}{(x+1)^2} \text{ και}$$

$$f''(x) = \frac{(-x^2 - 2x - 2)'(x+1)^2 - (-x^2 - 2x - 2)((x+1)^2)'}{(x+1)^4} = \frac{2}{(x+1)^3}.$$

Άρα $f''(x) > 0$ για κάθε $x > -1$, συνεπώς f κυρτή στο $(-1, +\infty)$.

ι. Έχουμε $\alpha > \frac{1}{e}, \beta > \frac{1}{e}$, άρα $\ln \alpha > -1$ και $\ln \beta > -1$. Επίσης

$$\frac{2 - \ln^2 \alpha}{\ln \alpha + 1} + \frac{2 - \ln^2 \beta}{\ln \beta + 1} \geq 2 \cdot \frac{2 - \ln^2(\sqrt{\alpha \cdot \beta})}{\ln(\sqrt{\alpha \cdot \beta}) + 1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{2 - (\ln \alpha)^2}{\ln \alpha + 1} + \frac{2 - (\ln \beta)^2}{\ln \beta + 1} \geq 2 \cdot \frac{2 - \left(\frac{\ln \alpha + \ln \beta}{2}\right)^2}{\frac{\ln \alpha + \ln \beta}{2} + 1} \Leftrightarrow$$

$$f(\ln \alpha) + f(\ln \beta) \geq 2 \cdot f\left(\frac{\ln \alpha + \ln \beta}{2}\right)$$

η οποία ανισότητα ισχύει, όπως αποδείχτηκε στο ερώτημα 1) για τη συνάρτηση f η οποία είναι κυρτή στο $(-1, +\infty)$ και για τους $\ln \alpha > -1$ και $\ln \beta > -1$.