

Κριτήριο Επαναληπτικό στα Μαθηματικά Κατεύθυνσης
Διάρκεια: 3 ώρες

Θέμα 1^ο :

- A) Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το Θ.Ε.Τ. (2+7=09μ)
B) Πότε μία συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε κλειστό διάστημα $[a,b]$ του πεδίου ορισμού της. (03μ)
Γ) Ερωτήσεις τύπου Σωστό - Λάθος (08μ)
α. Αν για τις συναρτήσεις f, g, h ορίζεται η σύνθεση $f \circ (g \circ h)$, τότε θα ισχύει $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$
β. Αν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη τότε η συνάρτηση δεν αντιστρέφεται.
γ. Η εικόνα $f(\Delta)$ διαστήματος Δ μέσω συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα.
δ. Η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$.
Δ) Η εικόνα $f(\Delta)$ ανοιχτού διαστήματος Δ μέσω συνεχούς συνάρτησης f είναι πάντα ανοιχτό διάστημα. Να χαρακτηρίσετε ως Σωστή ή Λανθασμένη την παραπάνω πρόταση και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (1+4=05μ)

Θέμα 2^ο :

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(2x+1) - 7}{x-1} = 10$$

- A) Να αποδείξετε ότι $f(3) = 7$, $f'(3) = 5$
B) Έστω (ε) η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $M(3, f(3))$
B1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της (ε) είναι: $y = 5x - 8$
B2. Ένα σημείο Σ με τετμημένη μεγαλύτερη του 3 κινείται στην ευθεία (ε) . Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του Σ είναι 2m/sec, βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου $OM\Sigma$ (12+(5+8)=25)

Θέμα 3^ο :

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε $f^2(x) - 2xf(x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $f(0) > 0$

- A) Βρείτε την f .
B) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και βρείτε την αντίστροφή της.
Γ) Να προσδιορίσετε το είδος μονοτονίας της f^{-1} .
Δ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $f(x)f(-x) = 1$
Ε) Να αποδείξετε ότι αν $(\alpha + \sqrt{1 + \alpha^2})(-\beta - \sqrt{1 + \beta^2}) = -1$, τότε θα ισχύει: $\alpha + \beta = 0$. (5x5=25)

Θέμα 4^ο :

Δίνεται συνάρτηση $\varphi: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $\varphi(x) = e^x - \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

A) Να αποδείξετε ότι η φ είναι γνησίως αύξουσα.

B) Βρείτε το σύνολο τιμών της φ .

Γ) Να αποδείξετε ότι η φ έχει μοναδική ρίζα.

Δ) Θεωρούμε τις $f(x) = e^x$ και $g(x) = \sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο A στη C_f και σημείο B στη C_g , ώστε οι εφαπτομένες των C_f, C_g στα σημεία A, B αντίστοιχα να είναι παράλληλες.

(5+5+5+10=25)