

ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

**Να οριστεί η έννοια της πραγματικής συνάρτησης.
Τί ονομάζουμε εξαρτημένη και τί ανεξάρτητη μεταβλητή;
Τι ονομάζουμε σύνολο τιμών μιας συνάρτησης;**

Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Ονομάζουμε **πραγματική συνάρτηση** με **πεδίο ορισμού το A** μια διαδικασία (κανόνα) f , με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y . Το y ονομάζεται **τιμή της f στο x** και συμβολίζεται με $f(x)$.

Το γράμμα x , που παριστάνει οποιοδήποτε στοιχείο του A λέγεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**, ενώ το γράμμα y , που παριστάνει την τιμή της f στο x , λέγεται **εξαρτημένη μεταβλητή**.

Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f σε όλα τα $x \in A$, λέγεται **σύνολο τιμών** της f και συμβολίζεται με $f(A)$. Είναι δηλαδή:

$$f(A) = \{y \mid y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in A\}.$$

Σχόλιο:

‘Όταν λέμε ότι “**Η συνάρτηση f είναι ορισμένη σ’ ένα σύνολο B** ”, εννοούμε ότι το B είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού της.

Στην περίπτωση αυτή με $f(B)$ θα συμβολίζουμε το σύνολο των τιμών της f σε κάθε $x \in B$.

Είναι δηλαδή: $f(B) = \{y \mid y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in B\}$

Σχόλιο:

Για να οριστεί μια συνάρτηση, f αρκεί να δοθούν δύο στοιχεία:

- το πεδίο ορισμού της και
- η τιμή της, $f(x)$, για κάθε x του πεδίου ορισμού της

Τι ονομάζουμε γραφική παράσταση συνάρτησης;

Έστω f συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο.

Το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$, $x \in A$, λέγεται **γραφική παράσταση** της f και συμβολίζεται συνήθως με C_f .

$$C_f = \{M(x, y) \mid y = f(x) \text{ και } x \in A\}$$

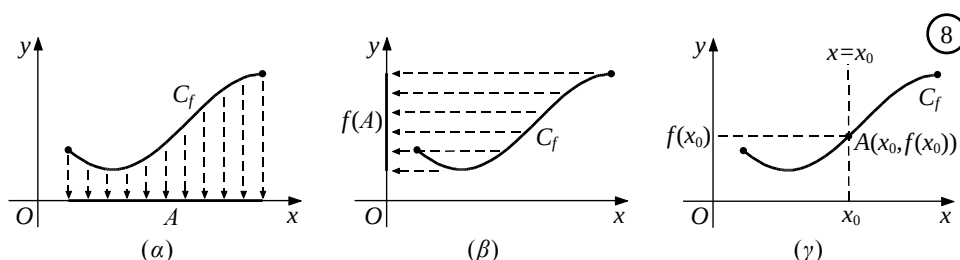
Πώς μπορούμε να διαπιστώσουμε αν ένα σύνολο σημείων σε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων είναι γραφική παράσταση συνάρτησης;

Κάθε κατακόρυφη ευθεία πρέπει να έχει με τη γραφική παράσταση της f **το πολύ ένα κοινό σημείο**, γιατί αφού κάθε $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο $y \in \mathbb{R}$, δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τετμημένη

**Πώς μπορούμε από τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης να βρούμε
(α) το πεδίο ορισμού της, (β) το σύνολο τιμών της και
(γ) την τιμή της συνάρτησης σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;**

Όταν δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f , τότε:

- Το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο A των τετμημένων των σημείων της C_f .
Δηλαδή η προβολή της C_f πάνω στον άξονα $x'x$.
- Το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο $f(A)$ των τεταγμένων των σημείων της C_f .
Δηλαδή η προβολή της C_f πάνω στον άξονα $y'y$.
- Η τιμή της f στο $x_0 \in A$ είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας $x = x_0$ και της C_f .



Κοινά σημεία C_f με τους άξονες $x'x$, $y'y$.

- Η C_f τέμνει τον $y'y$ σε το πολύ ένα σημείο.
- Σημείο τομής με $y'y$: θέτω $x=0$, εφόσον $0 \in A$. Σημείο τομής: $(0, f(0))$.
- Σημεία τομής με $x'x$: θέτω $y=0$. Οι τετμημένες των σημείων τομής είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$.

Σχετικές θέσεις C_f με τον άξονα $x'x$.

- Η C_f είναι πάνω από τον $x'x$ στα διαστήματα του x , που είναι λύσεις της ανίσωσης $f(x) > 0$.
- Η C_f είναι κάτω από τον $x'x$ στα διαστήματα του x , που είναι λύσεις της ανίσωσης $f(x) < 0$.

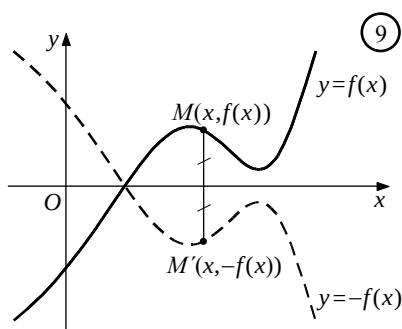
Κοινά σημεία και σχετικές θέσεις C_f , C_g .

Όλα τα παρακάτω αφορούν τα x εκείνα που ανήκουν στο $A_f \cap A_g$. Τα διαστήματα δηλαδή του x στα οποία ορίζονται και οι δύο συναρτήσεις.

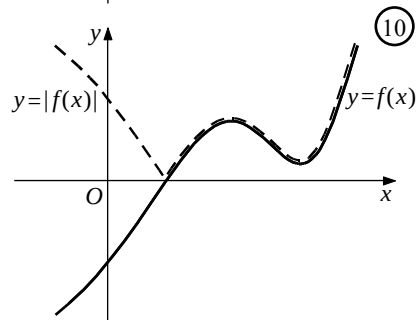
- Τα κοινά σημεία των C_f, C_g έχουν τετμημένες τις (δεκτές) λύσεις της εξίσωσης $f(x) = g(x)$.
- Η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g στα (δεκτά) διαστήματα του x , που είναι λύσεις της ανίσωσης $f(x) > g(x)$.
- Η C_f βρίσκεται κάτω από τη C_g στα (δεκτά) διαστήματα του x , που είναι λύσεις της ανίσωσης $f(x) < g(x)$.

Σχεδίαση των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $-f$ και $|f|$.

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $x'x$, της γραφικής παράστασης της f , γιατί αποτελείται από τα σημεία $M'(x, -f(x))$ που είναι συμμετρικά των $M(x, f(x))$, ως προς τον άξονα $x'x$. (Σχ. 9).

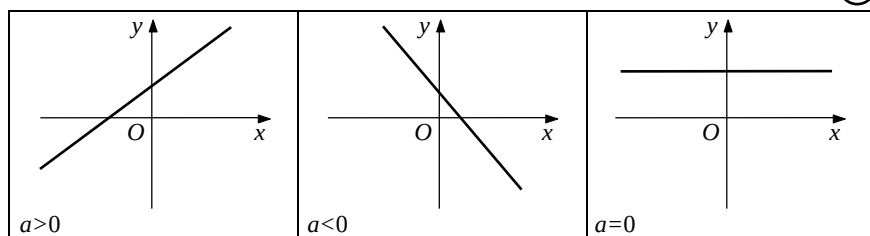


β) Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα $x'x$, των τμημάτων της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα αυτόν. (Σχ. 10).

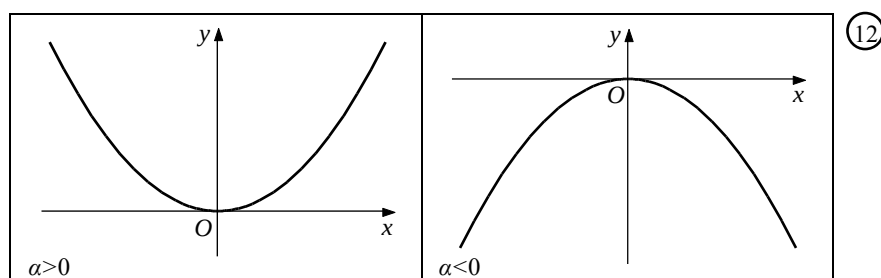


Γραφικές παραστάσεις βασικών συναρτήσεων

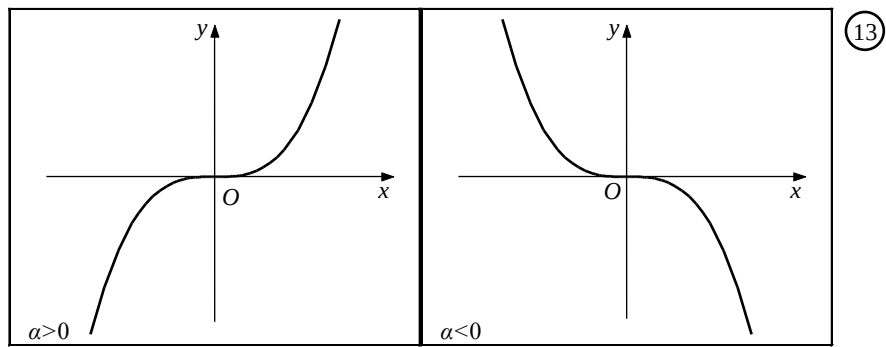
Η πολωνομική συνάρτηση $f(x) = ax + \beta$



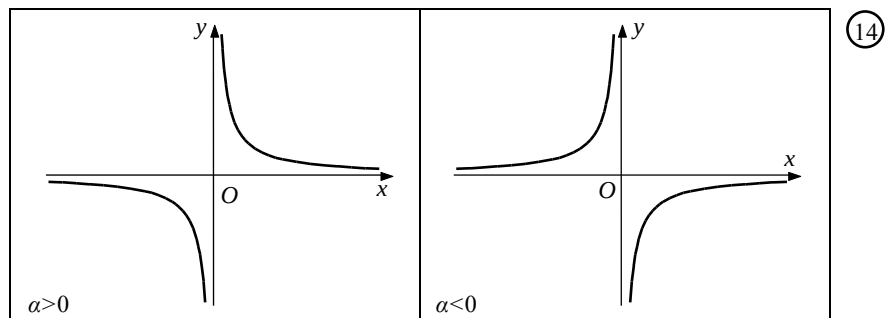
Η πολωνομική συνάρτηση $f(x) = ax^2$, $a \neq 0$.



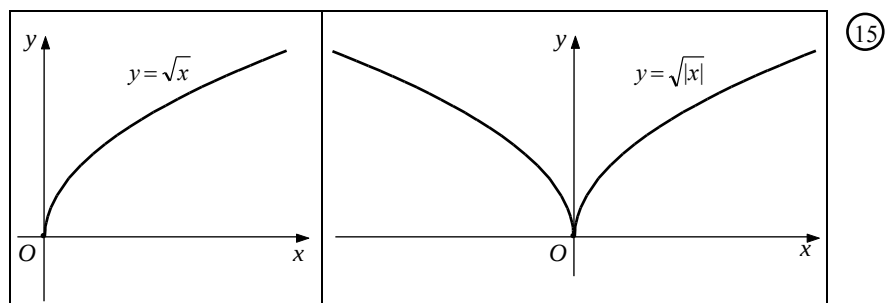
Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = ax^3$, $a \neq 0$.



Η ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{a}{x}$, $a \neq 0$.



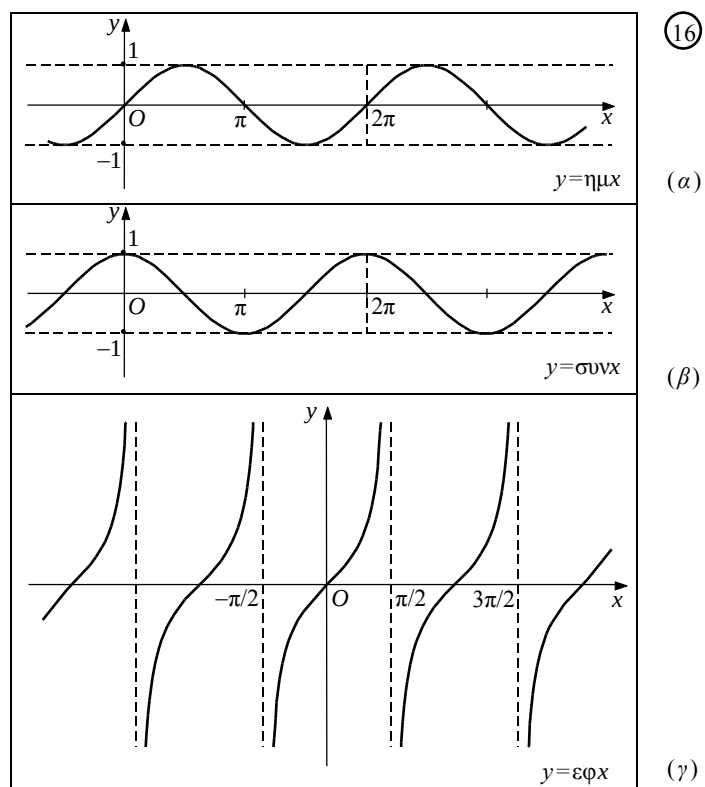
Οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{|x|}$.



Επειδή $g(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}$, η γραφική παράσταση της $y = \sqrt{|x|}$ αποτελείται από δύο

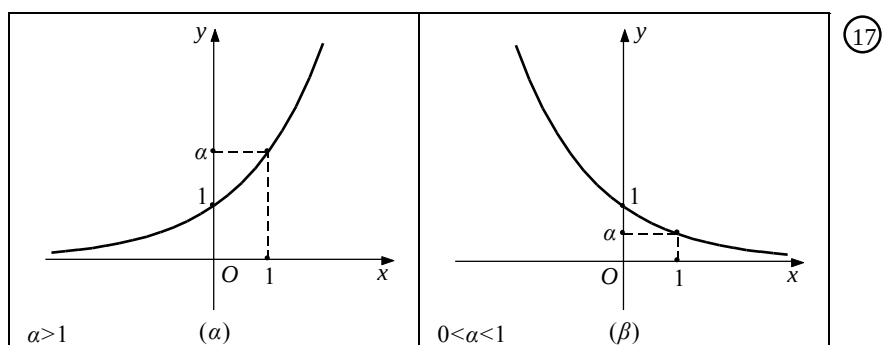
κλάδους. Ο ένας είναι η γραφική παράσταση της $y = \sqrt{x}$ και ο άλλος η συμμετρική της ως προς τον άξονα $y'y$.

Οι τριγωνικές συναρτήσεις : $f(x) = \eta\mu x$, $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $f(x) = \epsilon\phi x$



Υπενθυμίζουμε ότι, οι συναρτήσεις $f(x) = \eta\mu x$ και $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ είναι περιοδικές με περίοδο $T = 2\pi$, ενώ η συνάρτηση $f(x) = \epsilon\phi x$ είναι περιοδική με περίοδο $T = \pi$.

Η εκθετική συνάρτηση $f(x) = a^x$, $0 < a \neq 1$.



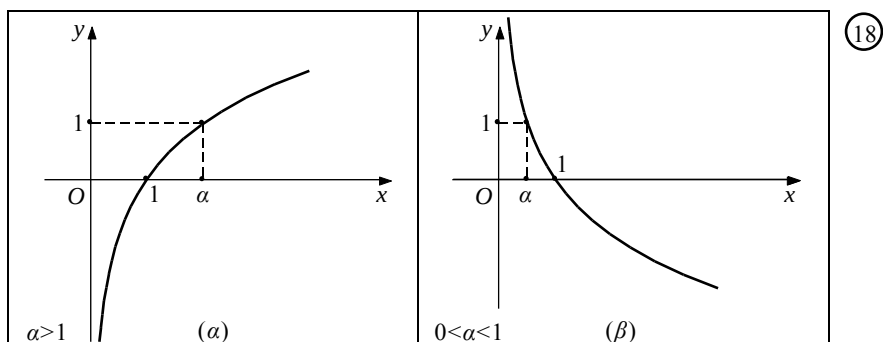
Υπενθυμίζουμε ότι:

αν $a > 1$, τότε: $a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$ (γν.αύξουσα)

ενώ

αν $0 < a < 1$, τότε: $a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$. (γν.φθίνουσα)

Η λογαριθμική συνάρτηση $f(x) = \log_a x$, $0 < a \neq 1$



Υπενθυμίζουμε ότι:

1) $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$

4) $\log_a (x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$

2) $\log_a a^x = x$ και $a^{\log_a x} = x$

5) $\log_a \left(\frac{x_1}{x_2} \right) = \log_a x_1 - \log_a x_2$

3) $\log_a a = 1$ και $\log_a 1 = 0$

6) $\log_a x_1^k = k \log_a x_1$

7) αν $a > 1$, τότε: $\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$ (γν.αύξουσα)

ενώ

αν $0 < a < 1$, τότε: $\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$. (γν.φθίνουσα)

8) $a^x = e^{x \ln a}$, αφού $a = e^{\ln a}$.

Οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπιση συνάρτησης:

- η $f(x) + k$ είναι κατακόρυφη μετατόπιση της $f(x)$ κατά k μονάδες στον θετικό ημιάξονα αν $k > 0$, ή στον αρνητικό ημιάξονα αν $k < 0$
- η $f(x + k)$ είναι οριζόντια μετατόπιση της $f(x)$ κατά k μονάδες προς τα αριστερά αν $k > 0$, ή προς τα δεξιά αν $k < 0$

Πότε δύο συναρτήσεις λέγονται ίσες;

Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν

- έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και
- για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

Παρατηρήσεις:

- Δύο ίσες συναρτήσεις έχουν το ίδιο σύνολο τιμών.
- Ισχύει: $f = g \Leftrightarrow C_f = C_g$.
Δηλαδή οι γραφικές παραστάσεις δύο ίσων συναρτήσεων ταυτίζονται και αντίστροφα.

Πότε δύο συναρτήσεις f και g με πεδία ορισμού A και B αντίστοιχα λέγονται ίσες σε ένα σύνολο Γ ; Δώστε ένα παράδειγμα.

Έστω δύο συναρτήσεις f και g με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα και Γ ένα υποσύνολο των A, B .

Αν για κάθε $x \in \Gamma$ ισχύει $f(x) = g(x)$, τότε λέμε ότι οι συναρτήσεις **f και g είναι ίσες στο σύνολο Γ .**

Παράδειγμα:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{x^2 + x}{x},$$

που έχουν πεδία ορισμού τα σύνολα $A = \mathbb{R} - \{1\}$ και $B = \mathbb{R} - \{0\}$ αντιστοίχως, είναι ίσες στο σύνολο $\Gamma = \mathbb{R} - \{0, 1\}$, αφού για κάθε $x \in \Gamma$ ισχύει

$$f(x) = g(x) = x + 1.$$

Πως ορίζονται οι πράξεις της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης δύο συναρτήσεων f, g ;

Ορίζουμε ως **άθροισμα** $f + g$, **διαφορά** $f - g$, **γινόμενο** fg και **πηλίκο** $\frac{f}{g}$ δύο συναρτήσεων f, g τις συναρτήσεις με τύπους

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Το πεδίο ορισμού των $f + g$, $f - g$ και fg είναι η τομή $A \cap B$ των πεδίων ορισμού A και B των συναρτήσεων f και g αντιστοίχως,

ενώ το πεδίο ορισμού της $\frac{f}{g}$ είναι το $A \cap B$, εξαιρουμένων των τιμών του x που μηδενίζουν τον παρονομαστή $g(x)$, δηλαδή το: $\{x \mid x \in A \text{ και } x \in B, \text{ με } g(x) \neq 0\}$.

Βασική παρατήρηση!!

Έστω f, g ορισμένες σε σύνολο A .

- Αν $f(x) \cdot g(x) \neq 0, \forall x \in A$ τότε $f(x) \neq 0, \forall x \in A$ και $g(x) \neq 0, \forall x \in A$.
- Αλλά αν για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) \cdot g(x) = 0$, τότε ΔΕΝ συμπεραίνουμε ότι $f(x) = 0, \forall x \in A$ ή $g(x) = 0, \forall x \in A$.

Αντιπαράδειγμα:

Υπάρχουν συναρτήσεις με γινόμενο τη μηδενική συνάρτηση ενώ αυτές δεν είναι

μηδενικές. Πχ: $f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \cdot g(x) = 0$ ενώ καμία δεν είναι η μηδενική συνάρτηση.

Να ορίσετε τη σύνθεση δύο συναρτήσεων

Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A, B αντιστοίχως, τότε ονομάζουμε **σύνθεση της f με την g** , και τη συμβολίζουμε με gof , τη συνάρτηση με τύπο

$$(gof)(x) = g(f(x))$$

και πεδίο ορισμού

$$D_{gof} = \{x \in A / f(x) \in B\}$$

Ο μετασχηματισμός είναι: $x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g(f(x))$

Η σύνθεση συναρτήσεων είναι μεταθετική;

Αν όχι, δώστε ένα αντιπαράδειγμα.

Γενικά, αν f, g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι gof και fog , τότε αυτές **δεν είναι υποχρεωτικές**.

Γενικά $gof \neq fog$.

Αντιπαράδειγμα:

Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \sqrt{x}$.

Τότε $D_f = (0, +\infty)$, ενώ $D_g = [0, +\infty)$.

i) Για να ορίζεται η παράσταση $g(f(x))$ πρέπει:

$$x \in D_f \quad \text{και} \quad f(x) \in D_g$$

ή, ισοδύναμα,

$$\begin{cases} x > 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1,$$

δηλαδή πρέπει $x \geq 1$. Επομένως, ορίζεται η gof και είναι

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(\ln x) = \sqrt{\ln x}, \quad \text{για κάθε } x \in [1, +\infty).$$

ii) Για να ορίζεται η παράσταση $f(g(x))$ πρέπει:

$$x \in D_g \quad \text{και} \quad g(x) \in D_f$$

ή, ισοδύναμα,

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0,$$

δηλαδή πρέπει $x > 0$. Επομένως, ορίζεται η fog και είναι

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \ln \sqrt{x}, \quad \text{για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

Η σύνθεση συναρτήσεων είναι προσεταιριστική;

Ναι.

Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $ho(gof)$, τότε ορίζεται και η $(hog)of$ και ισχύει: $ho(gof) = (hog)of$.

Τη λέμε σύνθεση των f, g και h τη συμβολίζουμε με $hogof$.

Η σύνθεση συναρτήσεων γενικεύεται και για περισσότερες από τρεις συναρτήσεις.

Πότε μία συνάρτηση λέγεται γνησίως αύξουσα, πότε γνησίως φθίνουσα και πότε γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Μια συνάρτηση f λέγεται :

- **γνησίως αύξουσα** σ' ένα δ ι α σ τ η μ α Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) < f(x_2)$
- **γνησίως φθίνουσα** σ' ένα δ ι α σ τ η μ α Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) > f(x_2)$
- αν μία συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, τότε λέμε ότι η f είναι **γνησίως μονότονη στο Δ** .

Πότε μία συνάρτηση λέγεται αύξουσα και πότε φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Μια συνάρτηση f λέγεται :

- **αύξουσα** σ' ένα δ ι α σ τ η μ α Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$$f(x_1) \leq f(x_2)$$

- **φθίνουσα** σ' ένα δ ι α σ τ η μ α Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$$f(x_1) \geq f(x_2)$$

Βασικές παρατηρήσεις!!!

Έστω f ορισμένη σε σύνολο Δ .

- f γν.αύξουσα στο Δ , τότε $\forall x_1, x_2 \in \Delta: f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2$.
- f γν.φθίνουσα στο Δ , τότε $\forall x_1, x_2 \in \Delta: f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow x_1 > x_2$.

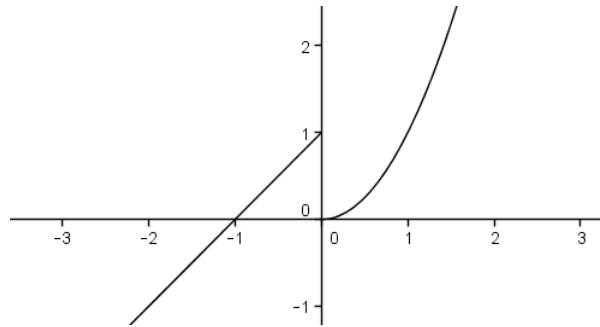
Επίσης:

- Αν f γν.αύξουσα στο Δ , τότε η $-f$ γν.φθίνουσα στο Δ .
- Αν f γν.αύξουσα στο Δ , και $f(x) > 0, \forall x \in \Delta$ τότε η $\frac{1}{f}$ είναι γν.φθίνουσα στο Δ .
- Το άθροισμα δύο γν.αυξουσων (ή φθίνουσων) συναρτήσεων είναι γν.αύξουσα (ή φθίνουσα αντίστοιχα) συνάρτηση.

Μία συνάρτηση που είναι γνησίως μονότονη με το ίδιο είδος μονοτονίας σε δύο διαστήματα A_1, A_2 είναι γν. μονότονη στην ένωση $A_1 \cup A_2$;

Όχι. Αντιπαράδειγμα:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ x + 1, & x < 0 \end{cases}$$



Επιπλέον παρατηρήσεις:

Αν η f είναι γν.μονότονη σε διάστημα Δ :

- Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα στο Δ
- Η C_f τέμνει τον $x'x$ σε το πολύ ένα σημείο

Τι ονομάζουμε (ολικό) μέγιστο, τι (ολικό) ελάχιστο και τι (ολικό) ακρότατο συνάρτησης;

Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A . Τότε η f :

- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **μέγιστο**, το $f(x_0)$, όταν

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A$$

- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **ελάχιστο**, το $f(x_0)$, όταν

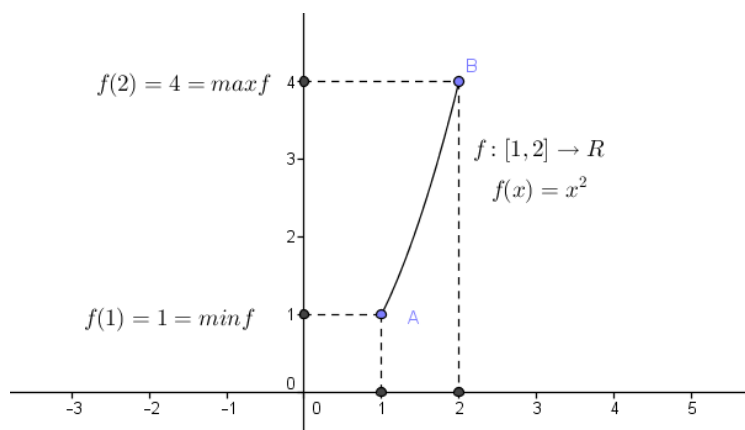
$$f(x) \geq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A$$

- Το (ολικό) μέγιστο και το (ολικό) ελάχιστο μιας συνάρτησης f λέγονται (ολικά) **ακρότατα** της f .

Παρατηρήσεις:

Αν η f ορίζεται σε κλειστό διάστημα και είναι γνησίως μονότονη, τότε παρουσιάζει ολικά ακρότατα. Συγκεκριμένα:

- Αν f γν. αύξουσα στο $A = [a, b]$, τότε: $f(a) = \min f$ και $f(b) = \max f$
- Αν f γν. φθίνουσα στο $A = [a, b]$, τότε: $f(a) = \max f$ και $f(b) = \min f$



Παρουσιάζει κάθε συνάρτηση ακρότατα;

Όχι.

Αντιπαράδειγμα:

Η συνάρτηση $f(x) = x^3$ δεν παρουσιάζει ούτε μέγιστο, ούτε ελάχιστο, αφού είναι γνησίως αύξουσα.

Σχόλιο:

Κάθε συνάρτηση ορισμένη και γν.μονότονη σε ανοιχτό διάστημα ΔΕΝ παρουσιάζει ολικά ακρότατα.

Βασική παρατήρηση:

Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.

Αν $\min f = m$ και $\max f = M$, τότε: $m \leq f(x) \leq M$ για κάθε $x \in A$.

Το αντίστροφο ΔΕΝ ισχύει!!

Αντιπαράδειγμα:

Για την $f : f(x) = \eta\mu x$ ισχύει $-2 \leq f(x) \leq 2$ αλλά ούτε το 2 ούτε το -2 είναι ολικά ακρότατα της συνάρτησης.

Άρτια - περιττή συνάρτηση.

Μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται :

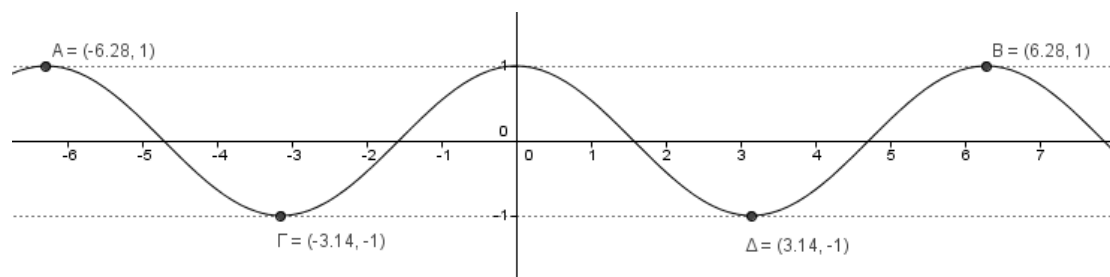
- Άρτια, όταν $\forall x \in A \Rightarrow -x \in A$ και $f(-x) = f(x)$
- Περιττή, όταν $\forall x \in A \Rightarrow -x \in A$ και $f(-x) = -f(x)$

Συμμετρίες:

- Κάθε άρτια συνάρτηση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$
- Κάθε περιττή συνάρτηση είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων.

Άρτια συνάρτηση – Μονοτονία και ακρότατα (εποπτική ερμηνεία)

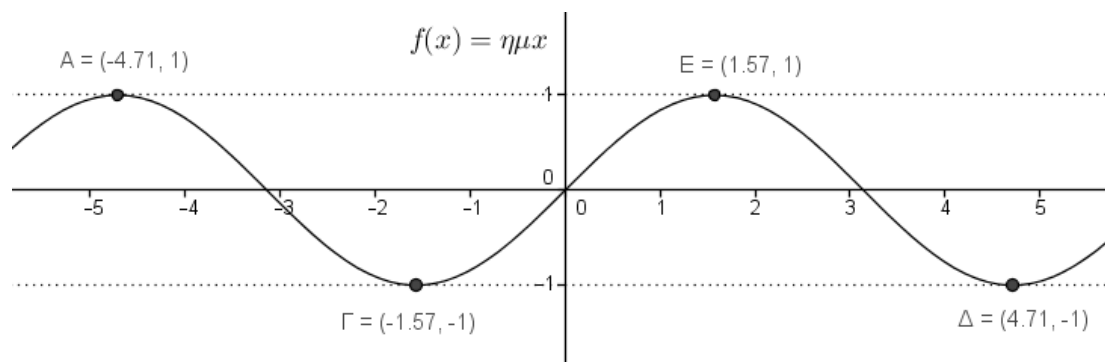
Μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ άρτια:



- Σε συμμετρικά ως προς το $O(0,0)$ διαστήματα έχει αντίθετο είδος μονοτονίας
- Αν παρουσιάζει στο x_0 ολικό ακρότατο, τότε θα παρουσιάζει ολικό ακρότατο ίδιου είδους και στο $-x_0$.
Δηλαδή οι τετμημένες των ολικών μεγίστων (ή ελαχίστων) είναι αντίθετες.

Περιττή συνάρτηση – Μονοτονία και ακρότατα (εποπτική ερμηνεία)

Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ περιττή:



- Σε συμμετρικά ως προς το $O(0,0)$ διαστήματα έχει ίδιο είδος μονοτονίας
- Αν παρουσιάζει στο x_0 ολικό μέγιστο, τότε θα παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $-x_0$, και αντίστροφα.

Πότε μία συνάρτηση λέγεται «1-1»;

Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται **συνάρτηση 1-1**, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\text{αν } x_1 \neq x_2, \text{ τότε } f(x_1) \neq f(x_2).$$

Σχόλιο:

Ισχύει επίσης

Η $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι **1-1**, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\text{αν } f(x_1) = f(x_2), \text{ τότε } x_1 = x_2$$

Αν γνωρίζουμε ότι μία συνάρτηση είναι «1-1» τι συμπεραίνουμε για τη γραφική της παράσταση;

Για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x .

Άρα δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη.

Αυτό σημαίνει ότι κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο

Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι «1-1»;

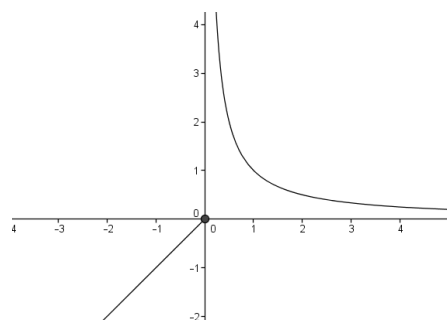
Ισχύει το αντίστροφο;

Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι «1-1».

Το αντίστροφο ΔΕΝ ισχύει.

Αντιπαράδειγμα:

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$$



Πότε μία συνάρτηση αντιστρέφεται και πως ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της;

Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ αντιστρέφεται, αν και μόνο αν, είναι «1-1».

Η αντίστροφη συνάρτηση της f , που συμβολίζεται με f^{-1} ορίζεται από τη σχέση:

$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$

με πεδίο ορισμού της f^{-1} το σύνολο τιμών της f και σύνολο τιμών της f^{-1} το πεδίο ορισμού της f .

Τι γνωρίζουμε για τη σύνθεση δύο αντίστροφων συναρτήσεων;

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad x \in A \quad \text{και} \quad f(f^{-1}(y)) = y, \quad y \in f(A)$$

Συμμετρία αντίστροφων συναρτήσεων:

Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

Κοινά σημεία C και C'

Τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων C , C' των συναρτήσεων f και f^{-1} αντιστοιχα:

- Αν η f είναι γνησίως αύξουσα, τότε τα κοινά σημεία ανήκουν όλα στην ευθεία $y = x$.

Για την εύρεση των τετμημένων τους λύνουμε οποιαδήποτε απο τις ισοδύναμες εξισώσεις:

$$f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow$$

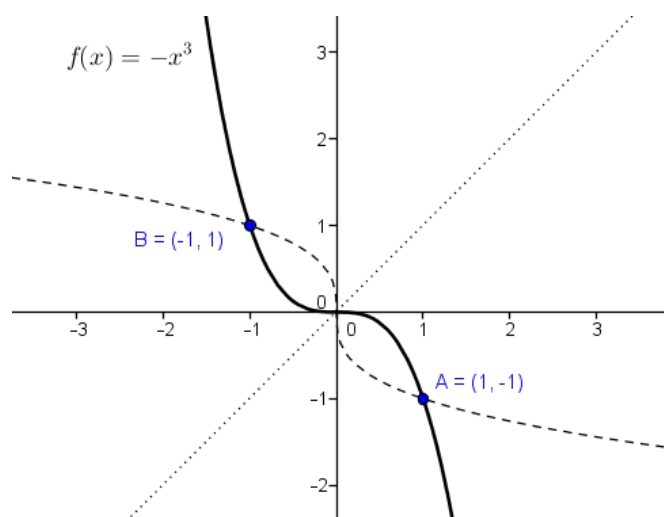
$$\Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(x) = x$$

- Σε κάθε άλλη περίπτωση τα κοινά σημεία δεν ανήκουν απαραίτητα όλα στην ευθεία $y = x$.

Για την εύρεση των τετμημένων τους λύνουμε την εξίσωση: $f(x) = f^{-1}(x)$

Παράδειγμα:



Οι C , C' έχουν τρία κοινά σημεία.

Το $O(0,0)$ που ανήκει στην $y = x$ και

τα $A(1,-1)$, $B(-1,1)$ που δεν ανήκουν στην $y = x$.

Μονοτονία και αντίστροφη

- Αν η f είναι γνησίως μονότονη, τότε αντιστρέφεται.
- Αν η f δεν αντιστρέφεται, τότε δεν είναι γνησίως μονότονη.
- Αν η f είναι γνησίως μονότονη σε διάστημα Δ , τότε η f^{-1} στο διάστημα $f(\Delta)$ είναι επίσης γνησίως μονότονη με το ίδιο είδος μονοτονίας.

Άρτια – περιττή και αντίστροφη

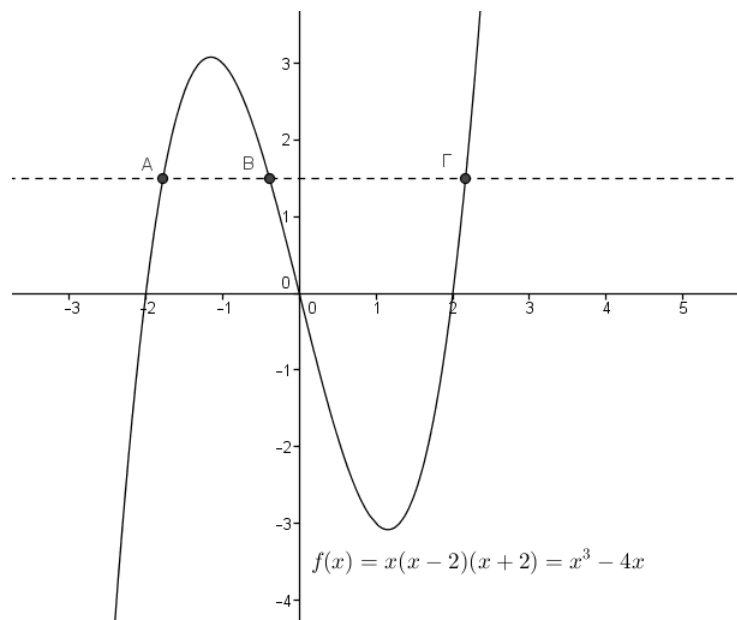
Αν η f είναι άρτια, τότε δεν αντιστρέφεται.

Προσοχή!

Δεν αντιστρέφονται όλες οι περιττές

Αν μία συνάρτηση είναι περιττή δεν συμπεραίνουμε απαραίτητα ότι αντιστρέφεται!!

Αντιπαράδειγμα:



Θεωρώ $f(x) = x^3 - 4x = x(x-2)(x+2)$.
Η f είναι περιττή αλλά η ευθεία $y = 1.5$ τέμνει την C_f στα διαφορετικά σημεία A, B και Γ. Άρα η f δεν αντιστρέφεται.