

Επαναληπτικό φύλλο αξιολόγησης
Μονοτονία - Ακρότατα

Έστω συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.

Πότε η f λέγεται γνησίως αύξουσα στο A ;

Πότε η f λέγεται γνησίως φθίνουσα στο A ;

Πότε η f λέγεται σταθερή στο A ;

Αν μία συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ , σε πόσα σημεία μπορεί η γραφική της παράσταση να τέμνει τον $x'x$ άξονα; _____

Αν μία συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ , πόσες λύσεις στο Δ μπορεί να έχει η εξίσωση $f(x) = 0$; _____

Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο A τότε τι συμπεραίνουμε για τον λόγο: $\lambda = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$;

Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A τότε τι συμπεραίνουμε για τον λόγο: $\lambda = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$;

Αν η f είναι σταθερή στο A τότε τι συμπεραίνουμε για τον λόγο: $\lambda = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$;

Αν μία συνάρτηση f έχει το ίδιο είδος μονοτονίας σε δύο διαστήματα Δ_1, Δ_2 του πεδίου ορισμού της, τότε διατηρεί το ίδιο μονοτονίας και στο $\Delta_1 \cup \Delta_2$;

Όχι απαραίτητα.

Αντιπαράδειγμα:

Έστω συναρτήσεις $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$

Αν f, g γνησίως αύξουσες τότε: $f + g$ _____

Αν f, g γνησίως φθίνουσες τότε: $f + g$ _____

Αν οι f, g έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας τότε η σύνθεσή τους είναι _____

Αν οι f, g έχουν το διαφορετικό είδος μονοτονίας τότε η σύνθεσή τους είναι _____

Αν η f είναι γν. αύξουσα, τότε η $-f$ είναι _____

Χαρακτηριστικές Ασκήσεις

1. Έστω η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = e^{1-x} - \ln x - 1$

A) Να αποδείξετε ότι : α) $f(1) = 0$

β) η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$

B) Να λυθεί η εξίσωση : $e^{1-x} = 1 + \ln x, \quad x > 0$

2. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x - e^{1-x}$.

A) Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

B) Να λυθεί η ανίσωση : $e^{1-x} < x$

3. Να λύσετε τις ανισώσεις:

A) $e^{-x} \leq x + 1$

B) $2 - \sqrt{1-x} < 0$

4*. Δίνονται οι γνησίως φθίνουσες συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$. Να αποδειχθούν :

α) η συνάρτηση $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $h(x) = \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{g(x)} - 1$ είναι γνησίως αύξουσα

β) η εξίσωση $f(x) + g(x) = f(x) \cdot g(x)$ έχει το πολύ μία λύση στο $\mathbb{R}$

5***. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η

$g(x) = \frac{4f(x)}{f^2(x)+1}$ έχει μέγιστο το +2 και ελάχιστο το -2.

Έστω συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.

Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο τον αριθμό M ;

Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο τον αριθμό m ;

Ερώτηση :

Για μία συνάρτηση f ορισμένη στο A ισχύει : $-10 \leq f(x) \leq 10$, για κάθε $x \in A$

Τότε το -10 είναι το ελάχιστο και το 10 το μέγιστο της συνάρτησης ;

Όχι, αντιπαράδειγμα:

Χαρακτηριστικές Ασκήσεις

1*. Έστω η συνάρτηση: $f(x) = e^x + e^{-x}$

A) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

B) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης και τις θέσεις τους.

2***. Έστω συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε: $f^2(x) + g^2(x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
Αν $h(x) = f(x)f(2-x) + g(x)g(2-x)$, τότε:

A) Βρείτε το $h(1)$

B) Να αποδείξετε ότι η h έχει μέγιστο, το οποίο να βρεθεί.
