

Επαναληπτικό φύλλο αξιολόγησης
1-1 – Αντίστροφη Συνάρτηση

Έστω συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.

Πότε η f λέγεται 1-1 στο A ;

Γεωμετρική ερμηνεία της 1-1 συνάρτησης στο A

Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι «1-1»;
Ισχύει το αντίστροφο;

Πότε μία συνάρτηση αντιστρέφεται;

Να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτησης

Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία _____

Όλα τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων C, C' των συναρτήσεων f και f^{-1} αντίστοιχα ανήκουν στην $y=x$;

Αν η f είναι γνησίως μονότονη, τότε αντιστρέφεται	Σ	Λ
Αν η f δεν αντιστρέφεται, τότε δεν είναι γνησίως μονότονη	Σ	Λ
Αν η f αντιστρέφεται, τότε είναι γνησίως μονότονη	Σ	Λ
Αν η f είναι γνησίως μονότονη σε διάστημα Δ , τότε η f^{-1} στο διάστημα $f(\Delta)$ είναι επίσης γνησίως μονότονη με το ίδιο είδος μονοτονίας.	Σ	Λ
Αν η f είναι άρτια, τότε δεν αντιστρέφεται.	Σ	Λ
Όλες οι περιττές αντιστρέφονται	Σ	Λ

Χαρακτηριστικές Ασκήσεις

1. Να εξεταστεί αν οι παρακάτω συναρτήσεις αντιστρέφονται. Αν ναι, να οριστούν οι αντίστροφές τους.

α. $f(x) = x^3 - 1$

β. $f(x) = x(x^3 - 1)$

γ. $f(x) = \ln \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

2. Έστω συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $(f \circ f)(x) = f(x) + x$

A) Να αποδειχθεί ότι η f αντιστρέφεται

B) Να υπολογιστεί το $f(0)$

3. Δίνεται πραγματικός αριθμός $a \neq 0$ και οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε:

$$(f \circ f)(x) = x^2 - (2a - 1)x + a^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$g(x) = x^2 - xf(x) + a \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

α. $f(a) = g(a) = a$

β. Η g δεν αντιστρέφεται

4. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f .

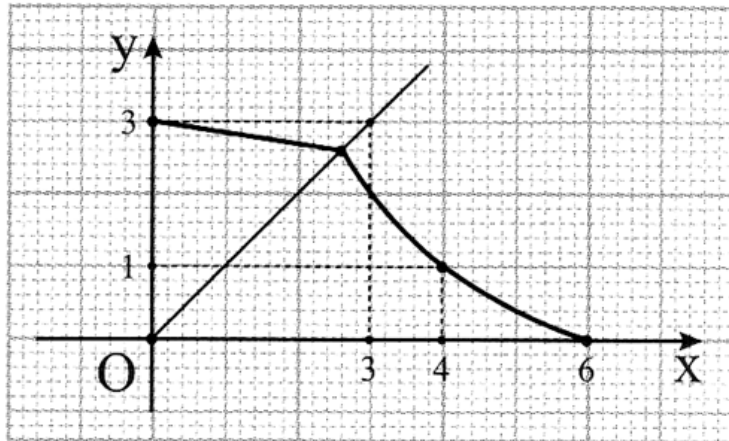
α. Να εξετάσετε αν η f είναι 1-1.

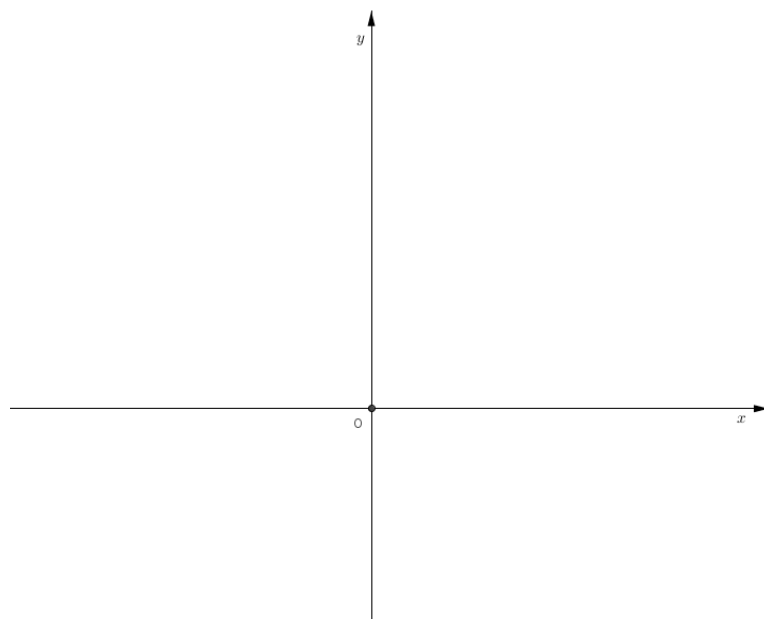
β. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f^{-1} .

γ. Να υπολογίσετε την παράσταση $A = f^{-1}(3)(f \circ f)(6) + (f \circ f^{-1})(2)$

δ. Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = 4$

ε. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f^{-1} .





5. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^3(x) + 2f(x) = 3 - x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- α. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται
- β. Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = 3$
- γ. Να αποδείξετε ότι η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$
- δ. Αν η f είναι γνησίως μονότονη, τότε:
 - i) να βρείτε το είδος μονοτονίας της f
 - ii) να λύσετε την ανίσωση $f(e^{x-1} + \ln x) > f(2 - x)$

6. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(f(x)) + f^3(x) = 2x + 3 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

- A) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1
- B) Να λύσετε την εξίσωση $f(2x^3 + x) - f(4 - x) = 0$

7. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(x) - f(y) = f\left(\frac{x}{y}\right), \text{ για κάθε } x, y \neq 0$$

Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f(x^2 + 3) = f(x^2 + 1) + f(x + 1)$

γ. Αν επιπλέον $f(x) > 0, \forall x > 1$ να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$
